CALCULO II
GRADOS DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y TELECOMUNICACION
Tercera Autoevaluación

Problema 1. Tomando $x(t) = 2\cos t$ y $y(t) = \sin t$ para parametrizar la elipse γ, se tiene $dx = -2\sin t\,dt$ y $dy = \cos t\,dt$. El parámetro t toma los valores $0 \le t \le 2\pi$. Luego la integral de línea es

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy &= \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t\,dt) + (3(2\cos t) - \sin t)\cos t\,dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(-4\sin t\cos t - 4\sin^2 t\right) + \left(6\cos^2 t - \cos t\sin t\right)\right] dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2 t - 4\sin^2 t - 5\sin t\cos t\right) dt = \\
&= 6\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - 4\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt - 5\int_0^{2\pi} \cos t\sin t\,dt \\
&= 6\pi - 4\pi - 5\cdot 0 = 2\pi\,.
\end{aligned}$$

Problema 2. Para que el campo vectorial en el plano $\mathbf{w}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ sea conservativo, debe cumplirse que $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$, así que derivamos e igualamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x+3y}(b\sin x + b\cos y - \sin y)\right) &= e^{2x+3y}(b\cos x - 2\sin y + 2b\cos y + 2b\sin x) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x+3y}(a\sin x + a\cos y + \cos x)\right) &= e^{2x+3y}(3\cos x + 3a\cos y + 3a\sin x - a\sin y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{2x+3y}(b\cos x - 2\sin y + 2b\cos y + 2b\sin x) &= e^{2x+3y}(3\cos x + 3a\cos y + 3a\sin x - a\sin y) \\
(b-3)\cos x + (a-2)\sin y + (2b-3a)(\cos y + \sin x) &= 0
\end{aligned}$$

y esta última identidad se cumple si $b = 3$ y $a = 2$, que son los valores buscados para que el campo sea conservativo.

Para reconstruir la función potencial $\varphi(x,y)$, partimos de que $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = \varphi_x(x,y) = M$, $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = \varphi_y(x,y) = N$, con lo que

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \int \varphi_x(x,y)\,dx = \int e^{2x+3y}(2\sin x + 2\cos y + \cos x)\,dx = e^{2x+3y}(\sin x + \cos y) + f(y) \\
\varphi(x,y) &= \int \varphi_y(x,y)\,dy = \int e^{2x+3y}(3\sin x + 3\cos y - \sin y)\,dy = e^{2x+3y}(\sin x + \cos y) + g(x)
\end{aligned}$$

donde $f(y)$ es constante respecto a x , y $g(x)$ lo es con respecto a y. Para hallar una sola expresión que represente a $\varphi(x,y)$ basta tomar $f(y) = g(x) = C$ (con C =constante). Así

$$\varphi(x,y) = e^{2x+3y}(\sin x + \cos y) + C\,.$$

Problema 3. Para parametrizar la porción del plano pedida, podemos simplemente tomar como parámetros las propias coordenadas x e y. Es decir, la parametrización es $x = x$, $y = y$, $z = 6 - 2x - 2y$. En este caso (ver figura) transformamos nuestra integral sobre la superficie del plano S en una integral sobre el recinto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3\right\}$$

Fijémonos en que la recta de corte del plano $S \equiv 2x + 2y + z - 6 = 0$ con el plano xy (primer octante) es la recta $y = 3 - x$. Es fácil comprobar que el vector normal que define esta parametrización tiene el mismo sentido que el vector $(2, 2, 1)$. O también que coincide con el vector

$$\frac{\nabla (2x + 2y + z - 6)}{\|\nabla (2x + 2y + z - 6)\|} = \mathbf{n} = \frac{(2, 2, 1)}{3}.$$

Así

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \left(xy, -x^2, x + z\right) \cdot \frac{(2, 2, 1)}{3} = \frac{2xy - 2x^2 + (x + z)}{3} = \\
&= \frac{2xy - 2x^2 + (x + 6 - 2x - 2y)}{3} = \frac{2xy - 2x^2 - x + 6 - 2y}{3},
\end{aligned}$$

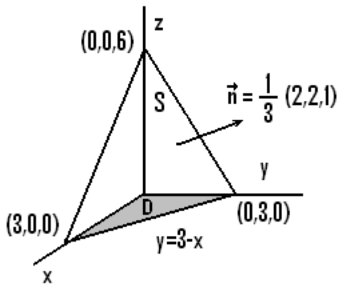

Figura 1: Situación en el Problema 3

luego la integral sobre el plano S la reducimos a una integral sobre la región D

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_S \left(\frac{2xy - 2x^2 - x + 6 - 2y}{3} \right) dS = \\
&= \iint_D \left(\frac{2xy - 2x^2 - x + 6 - 2y}{3} \right) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dxdy = \\
&= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=3-x} \left(2xy - 2x^2 - x + 6 - 2y\right) dydx = \\
&= \int_{x=0}^{x=3} \left(3x^3 - 12x^2 + 6x + 9\right) dx = \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

Problema 4. Buscamos los valores del parámetro para los que se cierra el bucle. Se observa que si $t = 1$ tenemos $\mathbf{s} = (0, 0)$, y el mismo valor de $\mathbf{s}$ se obtiene si $t = -1$. Entonces $\mathbf{s}(t = -1) = \mathbf{s}(t = 1) = (0, 0)$, por lo que $-1 \leq t \leq 1$ para $\mathbf{s}(t) = \left(t^2 - 1, t^3 - t\right)$. De la teoría sabemos, en virtud del Teorema de Green, que el área interior a una curva simple C, cerrada y suave a trozos (como lo es la nuestra) y orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, viene dada por $A = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$, luego si $x(t) = t^2 - 1$ y $y(t) = t^3 - t \Longrightarrow dx = 2tdt$ y $dy = \left(3t^2 - 1\right) dt$, y tendremos que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\left(t^2 - 1\right)\left(3t^2 - 1\right) - \left(t^3 - t\right) 2t\right] dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) dt = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Problema 5. Aplicando el Teorema de la Divergencia (o Teorema de Gauss), tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV\,,$$

luego podemos convertir la integral que queremos resolver en una integral de volumen sobre la región $\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < a^2, x^2+y^2 < z^2\right\}$. La divergencia del campo $\mathbf{F}$ es

$$\begin{aligned}
\text{div}\mathbf{F} &= \nabla \cdot \left(ye^z, \int_0^x e^{-t^2+\cos z} dt, z(x^2+y^2) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x e^{-t^2+\cos z} dt\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2)\right) = \\
&= 0 + 0 + \left(x^2+y^2\right) = x^2+y^2 \equiv \rho^2 \sin^2\phi
\end{aligned}$$

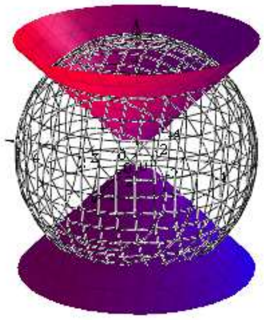

Figura 2: Situación en el Problema 5

pasando a coordenadas esféricas. Entonces $dV = \rho^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$, donde ϕ es el ángulo polar, y θ el azimutal. El corte de los conos con la esfera (ver dibujo) se produce a las alturas $z = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, luego deducimos que $\pm\frac{a}{\sqrt{2}} = z = a\cos\phi \Longrightarrow \phi = \arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\pi/4, 3\pi/4$, es decir debemos dividir la integral en dos partes, una para la cual$0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ (parte superior), y otra en la que $\frac{3\pi}{4} \le \phi \le \pi$ (parte inferior). Además $0 \le \rho \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \text{div}\mathbf{F}\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\rho^2\sin^2\phi\right)\rho^2\sin\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left(\rho^2\sin^2\phi\right)\rho^2\sin\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^4\sin^3\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \rho^4\sin^3\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\phi\, d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^4 d\rho \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi \\
&= 2\pi\frac{1}{5}a^5\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\sqrt{2}\right) + 2\pi\frac{1}{5}a^5\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{\pi a^5}{15}\left(8 - 5\sqrt{2}\right)\,.
\end{aligned}$$