



Tercer Curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales. **CÁLCULO III**  
CONTROL 2, 19 de diciembre de 2016.

Cada problema resuelto se valorará sobre **2.5 puntos**.

Tiempo: **120 minutos**.

**Problema 1**

a) Obtener la transformada de Laplace de la función  $g(x) = f(x - a)H(x - a)$  en términos de la transformada de Laplace de  $f$ , donde  $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$  es la función de salto.

b) Resolver el siguiente problema mediante transformada de Laplace

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 3, \\ e^{2x} & \text{si } x \geq 3, \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

**Problema 2** Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (1+x)\phi''(x) + \phi(x) + (\lambda-x)\phi(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \phi'(0) + \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0. \end{cases}$$

a) Escribir el cociente de Rayleigh asociado y razonar si se puede determinar el signo de los autovalores.

b) Calcular una cota superior del primer autovalor utilizando como función de prueba un polinomio sencillo.

**Problema 3** Resolver el problema para la ecuación de ondas con rozamiento en un intervalo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 6 \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 5x. \end{cases}$$

**Problema 4** Resolver la ecuación de Laplace en un cuarto de disco:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 3, \quad 0 < \theta < \pi/2, \\ u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0, \\ u(3, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$