Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Tercer Curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales. CÁLCULO III
CONTROL 2, 19 de diciembre de 2016.

RESOLUCIÓN

Problema 1

a) Obtener la transformada de Laplace de la función $g(x) = f(x-a)H(x-a)$ en términos de la transformada de Laplace de f, donde $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$ es la función de salto.

b) Resolver el siguiente problema mediante transformada de Laplace

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 3, \\ e^{2x} & \text{si } x \geq 3, \end{cases} \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1. \end{cases}$$

---

a)

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty f(x-a)H(x-a)e^{-sx}\,dx = \int_a^\infty f(x-a)e^{-sx}\,dx = \int_0^\infty f(y)e^{-s(y+a)}\,dy = e^{-sa}\mathcal{L}(f)(s).$$

b) Como la reacción se puede escribir como $e^{2x}H(x-3) = e^6 e^{2(x-3)}H(x-3)$, su transformada de Laplace es $\dfrac{e^6 e^{-3s}}{s-2}$. Así transformando la ecuación, llamando $Y = \mathcal{L}(y)$,

$$s^2 Y - 1 - 4sY + 4s = \frac{e^6 e^{-3s}}{s-2}$$

que despejando da

$$Y(s) = \frac{1 + \dfrac{e^6 e^{-3s}}{s-2}}{(s^2 - 4s + 4} = \frac{1}{(s-2)^2} + e^6 e^{-3s}\frac{1}{(s-2)^3}.$$

La transformada inversa nos da la solución

$$y(x) = xe^{2x} + e^6 \frac{1}{2}(x-3)^2 e^{2(x-3)}H(x-3) = e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}(x-3)^2 H(x-3)\right).$$

Problema 2 Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (1+x)\phi''(x) + \phi'(x) + (\lambda - x)\phi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \phi'(0) + \phi(0) = 0, \; \phi(1) = 0. \end{cases}$$

a) Escribir el cociente de Rayleigh asociado y razonar si se puede determinar el signo de los autovalores.

b) Calcular una cota superior del primer autovalor utilizando como función de prueba un polinomio sencillo.

a) Multiplicando la ecuación (escrita en forma de Sturm-Liouville) por ϕ e integrando en $(0,1)$,

$$\int_0^1 ((1+x)\phi')'(x)\phi(x)\,dx + \lambda\int_0^1 \phi^2(x)\,dx - \int_0^1 x\phi^2(x)\,dx = 0.$$

Despejamos λ e integramos el primer término por partes,

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-(1+x)\phi(x)\phi'(x)\big|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 (1+x)\big(\phi'(x)\big)^2\,dx + \int_0^1 x\phi^2(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \phi^2(x)\,dx} \\ &= \frac{-\phi^2(0) + \displaystyle\int_0^1 (1+x)\big(\phi'(x)\big)^2\,dx + \int_0^1 x\phi^2(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \phi^2(x)\,dx}\end{aligned}$$

No podemos garantizar el signo de λ debido al primer sumando, que es negativo.

b) Utilizamos como función test el polinomio más sencillo que verifique las condiciones de contorno, es decir $\phi(x) = 1 - x$,

$$\lambda_1 \le \frac{-1 + \displaystyle\int_0^1 (1+x)\,dx + \int_0^1 x(1-x)^2\,dx}{\displaystyle\int_0^1 (1-x)^2\,dx} = \frac{7}{4}.$$

Problema 3 Resolver el problema para la ecuación de ondas con rozamiento en un intervalo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \\ u(x,0) = 0, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 6\,\mathrm{sen}\,2x - \mathrm{sen}\,5x. & \end{cases}$$

Buscando soluciones en variables separadas, $u(x,t) = X(x)T(t)$, se tiene $T''X = 4X''T - 10T'X$, es decir $\dfrac{T''}{4T} + \dfrac{10T'}{4T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} T'' + 10T' + 4\lambda T = 0, \quad t > 0, \\ T(0) = 0. \end{cases}$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = n^2$, $n \ge 1$, $X_n(x) = \mathrm{sen}\,nx$. Sustituyendo en el segundo problema, como la ecuación característica tiene soluciones $-5 \pm \sqrt{25 - 4n^2}$

se tiene que las soluciones de la parte temporal son

$$T_n(t) = c_n e^{(-5+\sqrt{25-4n^2})\,t} + d_n e^{(-5-\sqrt{25-4n^2})\,t}, \qquad n = 1,\, 2$$
$$T_n(t) = e^{-5t}(c_n \cos(\sqrt{4n^2-25}\,t) + d_n \operatorname{sen}(\sqrt{4n^2-25}\,t)), \qquad n \geq 3.$$

El dato en $t = 0$ implica $c_n = -d_n$ para $n = 1,\, 2$, $c_n = 0$ para $n \geq 3$. Por tanto deberíamos intentar una solución en forma de serie con estas funciones, pero el dato velocidad inicial hace que solo nos interesen los valores $n = 2$ y $n = 5$. Por tanto ponemos

$$u(x,t) = c_2(e^{-2t} - e^{-8t}) \operatorname{sen} 2x + d_5 e^{-5t} \operatorname{sen}(5\sqrt{3}\,t) \operatorname{sen} 5x,$$

e igualando en $t = 0$ obtenemos $6c_2 = 6$, $5\sqrt{3}\,d_5 = -1$. La solución es entonces

$$u(x,t) = (e^{-2t} - e^{-8t}) \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{5\sqrt{3}} e^{-5t} \operatorname{sen}(5\sqrt{3}\,t) \operatorname{sen} 5x.$$

Problema 4 Resolver la ecuación de Laplace en un cuarto de disco:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 3, \quad 0 < \theta < \pi/2, \\ u(r,0) = u(r,\pi/2) = 0, & \\ u(3,\theta) = f(\theta). & \end{cases}$$

Escribiendo el laplaciano en polares $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$, y buscando soluciones en variables separadas, $u(r,\theta) = G(r)\varphi(\theta)$, se tiene $G''\varphi + \dfrac{1}{r}G'\varphi + \dfrac{1}{r^2}G\varphi'' = 0$, es decir $\dfrac{r^2 G''}{G} + \dfrac{rG'}{G} = -\dfrac{\varphi''}{\varphi} = \lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad 0 < x < \pi/4, \\ \varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 G'' + rG' - \lambda G = 0, \quad 0 < r < 3, \\ |G(0)| < \infty. \end{cases}$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = 4n^2$, $n \geq 1$, $\varphi_n(\theta) = \operatorname{sen} 2n\theta$. Sustituyendo en el segundo problema, que es una ecuación de Euler, como la ecuación indicial tiene soluciones $k = \pm 2n$ se tiene que las soluciones de la parte radial son

$$G(r) = a_n r^{2n} + b_n r^{-2n}.$$

El dato de no singularidad en $r = 0$ implica $b_n = 0$. Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{2n} \operatorname{sen} 2n\theta.$$

El dato frontera implica $a_n 3^{2n} = f_n$, el coeficiente de Fourier en $(0,\pi/2)$ de la función f, que es $f_n = \dfrac{2}{\pi/2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(s) \operatorname{sen} 2ns\, ds$. Finalmente la solución es

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3}\right)^{2n} \left(\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(s) \operatorname{sen} 2ns\, ds\right) \operatorname{sen} 2n\theta.$$
