uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Resolución Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 2

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

2. Ecuaciones lineales de orden superior

2.1. Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes

Problema 2.1.1 *i)* $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3 \rightsquigarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$; *ii)* $\lambda = \pm 2 \rightsquigarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$; *iii)* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5 \rightsquigarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x}$;*iv)* $\lambda = \pm 2\sqrt{2}\, i \rightsquigarrow y = c_1 \cos 2\sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} 2\sqrt{2}x$; *v)* $\lambda = -2 \pm i \rightsquigarrow y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$; *vi)* $\lambda = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2} \rightsquigarrow y = e^{-x/2}(c_1 \cos(\dfrac{\sqrt{5}\,x}{2}) + c_2 \operatorname{sen}(\dfrac{\sqrt{5}\,x}{2}))$.

Problema 2.1.2 *i)* solución homogénea $y_h = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-5x}$; solución particular $y_p = A\mathrm{e}^{4x} \rightsquigarrow A = \dfrac{1}{3}$; solución completa $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-5x} + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{4x}$; *ii)* solución particular $y_p = Ax^2 + Bx + C \rightsquigarrow A = 5$, $B = 4$, $C = 2$; solución completa $y(x) = \mathrm{e}^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + 5x^2 + 4x + 2$; *iii)* solución particular $y_p = Ax\mathrm{e}^{-2x} \rightsquigarrow A = -4$; solución completa $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-2x}(c_2 - 4x)$; *iv)* solución particular $y_p = A\cos 2x + \operatorname{sen} 2x \rightsquigarrow A = \dfrac{3}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$; solución completa $y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2}(3\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$; *v)* solución particular $y_p = A\mathrm{e}^{-2x} + Bx^2\mathrm{e}^x \rightsquigarrow A = \dfrac{1}{9}$, $B = \dfrac{1}{2}$; solución completa $y(x) = \mathrm{e}^x(c_1 + c_2 x + \dfrac{1}{2}x^2) + \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{-2x}$; *vi)* solución particular $y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\operatorname{sen} x \rightsquigarrow A = 0$, $B = -\dfrac{1}{2}$, $C = -\dfrac{1}{2}$, $D = 0$; solución completa $y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}(\cos x + x \operatorname{sen} x)$; *vii)* solución particular $y_p = \mathrm{e}^x(A\cos x + B \operatorname{sen} x) \rightsquigarrow A = \dfrac{4}{5}$, $B = \dfrac{3}{5}$; solución completa $y(x) = \mathrm{e}^{3x}(c_1 + c_2 x) + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^x(4\cos x + 3\operatorname{sen} x)$; *viii)* solución particular $y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x + Cx^2 + Dx + E \rightsquigarrow A = -1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -1$, $E = -2$; solución completa $y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2} + c_2 \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}) - \cos x + x^2 - x - 2$.

Problema 2.1.3 *i)* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2 \rightsquigarrow y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x}$; *ii)* $y(x) = c_1\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x/2}(c_2 \cos \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2} + c_3 \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2})$; *iii)* $\lambda = \pm a$ dobles, $y(x) = \mathrm{e}^{ax}(c_1 + c_2 x) + \mathrm{e}^{-ax}(c_3 + c_4 x)$; *iv)* $y(x) = \mathrm{e}^x(c_1 + c_2 x) + c_3\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{15}{2} + 5x + \dfrac{3}{2}x^2$; *v)* $y(x) = \mathrm{e}^x(c_1 + c_2 x + \dfrac{1}{4}x^2) + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$.

Problema 2.1.4 *i)* Las soluciones de la ecuación característica son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, por lo que ésta es $\lambda^2 - \lambda = 0$, que corresponden a la ecuación diferencial $y'' - y' = 0$. *ii)* $\lambda_{1,2} = \pm 3i \rightsquigarrow \lambda^2 + 9 = 0 \rightsquigarrow y'' + 9y = 0$. *iii)* $\lambda_{1,2} = -2$ doble $\rightsquigarrow y'' + 4y' + 4y = 0$. *iv)* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = \pm i \rightsquigarrow y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. *v)* $\lambda_{1,2,3} = 1$ triple $\rightsquigarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Problema 2.1.5 $y_1(x) - y_2(x) = 2\mathrm{e}^{-3x}$ debe ser solución de la ecuación homogénea; lo mismo ocurre para $y_1(x) - y_3(x) = \mathrm{e}^{-3x} + x\mathrm{e}^{-3x}$. Por tanto $\lambda = -3$ debe ser solución doble de la ecuación característica, así que $a = 6$, $b = 9$. Además e^{-x} debe ser solución de la ecuación completa, con lo que $f(x) = A\mathrm{e}^{-x}$; sustituyendo se obtiene $A = 4$. Finalmente la solución general es $y_g(x) = \mathrm{e}^{-3x}(c_1 + c_2 x) + 4\mathrm{e}^{-x}$.

Problema 2.1.6 *a)* Basta sustituir; *b)* la solución general es $x_g(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{3t}$; imponiendo los datos, $x(t) = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{3t}$.

Problema 2.1.7 *i)* $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$; *ii)* $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) = e^{2-2t}(-4t^2 + 4t - 2)$; *iii)* $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \mathrm{e}^{-2t}(c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t) = \frac{t^2}{2} + t + 1$; *iv)* $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 \mathrm{e}^{-t} + c_5 \mathrm{e}^{-3t} = -e^{-t} + \frac{t^2}{2} - t + 1$.

Problema 2.1.8 La solución general de la ecuación homogénea es $y_h(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^x + c_3 x \mathrm{e}^x$; por tanto una solución particular de la ecuación completa es $y_p(x) = Ax + Bx^2 \mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{5x}$, obteniendo $A = 2$, $B = -12$, $C = 1/2$; la solución general es entonces $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde los datos iniciales dan $c_1 = 11$, $c_2 = 0$, $c_3 = 9$; finalmente $y(x) = e^x(-11 + 9x - 12x^2) + \frac{1}{2}e^{5x} + 2x + 11$.

Problema 2.1.9 *i)* Las soluciones de la ecuación homogénea son $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \operatorname{sen} 2x$, con wronskiano $W = 2$; poniendo entonces $y_p = u \cos 2x + v \operatorname{sen} 2x$, se tiene

$$u = -\int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \operatorname{tg} 2x \, dx = \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2x - \log|\sec 2x + \operatorname{tg} 2x|), \ v = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x;$$

finalmente $y_p(x) = \frac{-1}{4} \cos 2x \log|\sec 2x + \operatorname{tg} 2x|$; *ii)* $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, $W = e^{-2x}$,

$$u = -\int e^{2x} x e^{-x} e^{-x} \log x \, dx = -\frac{1}{4}x^2(\log x - 1), \ v = \int e^{2x} e^{-x} e^{-x} \log x \, dx = x(\log x - 1),$$

$y_p(x) = x^2 e^{-x}(\frac{1}{2}\log x - \frac{3}{4})$; *iii)* $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{3x}$, $W = 4e^{2x}$,

$$y_p(x) = -e^{-x} \int 16x \, dx + e^{3x} \int 16x e^{-4x} \, dx = 2e^{-x}(8x^2 + 4x - 1);$$

también se podría haber buscado directamente $y_p = (Ax^2 + Bx)e^{-x}$; *iv)* $y_1 = e^{-x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$, $W = 2e^{-2x}$,

$$y_p(x) = -e^{-x} \cos 2x \int \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x \, dx + e^{-x} \operatorname{sen} 2x \int \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{4} e^{-x}(\cos 2x \log|\cos 2x| + 2x \operatorname{sen} 2x).$$

Problema 2.1.10 *i)* $k(k-1) - 4k + 4 = 0 \rightsquigarrow k_1 = 1, \ k_2 = 4 \rightsquigarrow y(x) = c_1 x + c_2 x^4$, *ii)* $k = \pm n \rightsquigarrow y(x) = c_1 x^n + c_2 x^{-n}$, *iii)* $k = 0$ doble, $y(x) = c_1 \log x + c_2$; también se podría haber resuelto por reducción de orden; *iv)* $k_1 = 0, \ k_2 = 1, \ k_3 = -1 \rightsquigarrow y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^{-1}$, *v)* $k_1 = 1, \ k_2 = 2, \ k_3 = -1 \rightsquigarrow y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1}$, *vi)* $k_1 = 1, \ k_{2,3} = \pm i \rightsquigarrow y(x) = c_1 x + c_2 \cos(\log x) + c_3 \operatorname{sen}(\log x)$, *vii)* $k_1 = -1$ doble $\rightsquigarrow y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \log x + \frac{x^2}{3}$, *viii)* $k_1 = 1$ triple $\rightsquigarrow y(x) = c_1 x + c_2 x \log x + c_3 x (\log x)^2 + \frac{x^4}{9}$.

Problema 2.1.11 Como $W = e^{-\int \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$, se tiene $y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \int \frac{x}{x \cos^2 x} \, dx = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.

Problema 2.1.12 *i)* Como $W = e^{\int \frac{2x}{x^2-1}} = x^2 - 1$, se tiene $y_2 = x \int \frac{x^2-1}{x^2} = x^2 + 1$; por otro lado, $y_p = -x \int (x^2+1) + (x^2-1) \int \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = -\frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}$; finalmente

$y(x) = c_1 x + c_2(x^2+1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$, *ii)* Como $W = e^{\int \frac{x^2-2}{x^2+x}} = \frac{e^x(x+1)}{x^2}$, se tiene $y_2 = \frac{1}{x}\int (x+1)e^x = e^x$; por otro lado, $y_p = -\frac{1}{x}\int x^2 + e^x \int xe^{-x} = -\frac{x^2}{3} - x - 1$; finalmente $y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 e^x - \frac{x^2}{3} - x - 1$.

2.2. Aplicaciones

Problema 2.2.1 $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$, $k_4 = -3 \rightsquigarrow x(t) = c_1 + c_2 t^2 + c_3 t^{-1} + c_4 t^{-3}$.

Problema 2.2.2 Si $Q' = I$, el problema para Q es

$$\begin{cases} Q'' + 2Q' + 10Q = \operatorname{sen} 2t, \\ Q(0) = 0, \\ Q'(0) = 0. \end{cases}$$

La solución es $Q = e^{-t}(c_1\cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t) + A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t$, donde A y B se obtienen por el método de coeficientes indeterminados, $A = -\frac{1}{13}$, $B = \frac{3}{26}$, mientras que c_1 y c_2 se obtienen de los datos iniciales, $c_1 = \frac{1}{13}$, $c_2 = -\frac{2}{39}$. Finalmente $I = Q' = -\frac{1}{13}\mathrm{e}^{-t}(3\cos 3t + \frac{7}{3}\operatorname{sen} 3t) + \frac{1}{13}(3\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t)$. También se podría haber estudiado desde el principio el problema en la intensidad de corriente

$$\begin{cases} I'' + 2I' + 10I = 2\cos 2t, \\ I(0) = 0, \\ I'(0) = -10Q(0) - 2Q'(0) = 0. \end{cases}$$

Problema 2.2.3 La constante del muelle es $k = \frac{100Nw}{2m} = 50Nw/m$. Por tanto el problema resultante es

$$\begin{cases} 0{,}5x'' + 6x' + 50x = 0, \quad t > 0, \\ x(0) = 0{,}5 \\ x'(0) = -15. \end{cases}$$

La solución es $x(t) = \mathrm{e}^{-6t}(0{,}5\cos 8t - 1{,}5\operatorname{sen} 8t)$.

Problema 2.2.4 *i)* $u(t) = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$, con $A = \frac{1}{8-2\omega^2}$, $B = 0$, $c_1 = -\frac{1}{8-2\omega^2}$, $c_2 = 0$, es decir, $u(t) = \frac{1}{2(\omega^2-4)}(\cos 2t - \cos\omega t)$; *ii)* usando la regla de L'Hôpital, $u(t) = \lim_{\omega\to 2}\frac{1}{2(\omega^2-4)}(\cos 2t - \cos\omega t) = \frac{1}{8}t\operatorname{sen} 2t$; *iii)* $u(t) = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$, con $A = 0$, $B = \frac{1}{8}$, $c_1 = c_2 = 0$, es decir, $u(t) = \frac{1}{8}t\operatorname{sen} 2t$.

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–