uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Resolución Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 4

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

CC BY NC SA

4. Método de separación de variables

4.1. Separación de variables

Problema 4.1.1 *i)* Poniendo $u(r,t) = R(r)T(t)$ se obtiene $(rR')' + \lambda r R = 0$, $T' + \lambda k T = 0$.
ii) $u(r,\theta) = R(r)H(\theta) \rightsquigarrow (rR')' - \dfrac{\lambda}{r} R = 0$, $H'' + \lambda H = 0$.
iii) $u(x,t) = X(x)T(t) \rightsquigarrow kX'' - v_0 X' + \lambda X = 0$, $T' + \lambda k T = 0$.
iv) $u(x,y) = X(x)Y(y) \rightsquigarrow X'' + \lambda X = 0$, $Y'' - \lambda Y = 0$.
v) $u(r,t) = R(r)T(t) \rightsquigarrow (r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0$, $T' + \lambda k T = 0$.
vi) $u(x,t) = X(x)T(t) \rightsquigarrow X^{iv)} + \lambda X = 0$, $T' + \lambda k T = 0$.
vii) $u(x,t) = X(x)T(t) \rightsquigarrow X'' + \lambda X = 0$, $T'' + \lambda c^2 T = 0$.

Problema 4.1.2

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n(\pi - y);$$
$$2 \operatorname{sen} 3x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n\pi \ \Rightarrow \ a_3 = \frac{2}{\operatorname{senh} 3\pi}, \quad a_n = 0 \ \forall n \neq 3 \ \Rightarrow$$
$$u(x,y) = \frac{2}{\operatorname{senh} 3\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{senh} 3(\pi - y).$$

Problema 4.1.3

$$\varphi(x,y) = b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{senh}(\frac{n\pi y}{L});$$
$$f(x) = \varphi(x,L) = b_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{senh}(n\pi) \ \Rightarrow$$
$$b_0 = \frac{1}{L^2} \int_0^L f(s)\, ds, \qquad b_n = \frac{2}{L \operatorname{senh}(n\pi)} \int_0^L f(s) \cos(\frac{n\pi s}{L})\, ds \quad n \geq 1.$$

Problema 4.1.4

a) La condición de compatibilidad es $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, es decir $\displaystyle\int_0^L f(x)\, dx = 0$.

b)

$$u(x,y) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \cosh(\frac{n\pi y}{L});$$
$$f(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,H) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{L} \cos(\frac{n\pi x}{L}) \operatorname{senh}(\frac{n\pi H}{L}) \ \Rightarrow$$
$$b_0 \in I\!R, \quad \int_0^L f(s)\, ds = 0, \quad b_n = \frac{2L}{Ln\pi \operatorname{senh}(n\pi H/L)} \int_0^L f(s) \cos(\frac{n\pi s}{L})\, ds \quad n \geq 1.$$

c) Si $u(x,y) = \lim\limits_{t\to\infty} v(x,y,t)$, donde v es solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v, & 0 < x < L,\ 0 < y < H,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,0,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(L,y,t) = 0, & \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,H,t) = f(x), & \\ v(x,y,0) = g(x,y), & \end{cases}$$

entonces, por conservación de la energía,

$$\int_0^L \int_0^H g(x,y)\,dydx = \int_0^L \int_0^H v(x,y,0)\,dydx = b_0 LH.$$

Es decir, b_0 es igual al valor medio del dato inicial g en el rectángulo.

Obsérvese que la conservación de la energía se deduce de la ecuación y los datos frontera:

$$E(t) = \int_\Omega v \ \Rightarrow\ E'(t) = \int_\Omega \Delta v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 + 0 + 0 + \int_0^L f(x)\,dx = 0.$$

Problema 4.1.5

a) La solución estacionaria verifica el problema $\begin{cases} kv'' - \alpha v = 0, & 0 < x < L, \\ v(0) = v(L) = 0. \end{cases}$ La única solución es $v(x) = 0$.

b) Separando variables se tiene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty a_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)\mathrm{e}^{-(\alpha + kn^2\pi^2/L^2)t}.$$

El dato inicial implica $a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\operatorname{sen}(n\pi s/L)\,ds$. Está claro que, independientemente del dato inicial, se tiene $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$, pues todas las exponenciales son negativas.

Problema 4.1.6 Si ahora $\alpha < 0$, las soluciones estacionarias son $v(x) = 0$ si $L\sqrt{-\alpha/k} \neq n\pi$ para $n \in I\!N$, mientras que si $L\sqrt{-\alpha/k} = n\pi$ para algún $n \in I\!N$, se tiene $v(x) = c\operatorname{sen}(n\pi x/L)$. La solución del problema de evolución es, igual que antes

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^\infty a_m \operatorname{sen}(m\pi x/L)\mathrm{e}^{-(\alpha + km^2\pi^2/L^2)t}.$$

Si $\alpha > -k\pi/L^2$, se tiene $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.
Si $\alpha = -k\pi/L^2$, se tiene $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = a_1 \operatorname{sen}(\pi x/L)$.
Si $\alpha < -k\pi/L^2$, no existe $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$, pues oscila cada vez más (hay factores exponenciales que divergen).

Problema 4.1.7

a) Separando variables se tiene

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\operatorname{sen}(\omega_n t)+b_n\cos(\omega_n t)\Big)\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,x),$$

donde $\lambda_n=n^2\pi^2/L^2$ y $\omega_n=\sqrt{T_0\lambda_n/\rho}$, mientras que a_n y b_n son los coeficientes de Fourier en senos de $g(x)/\omega_n$ y $f(x)$, respectivamente. Escribiendo la parte temporal como $\alpha_n\cos[\omega_n(t-\delta_n)]$, e igualando términos después de desarrollar el coseno de la suma,

$$\begin{cases}\alpha_n\operatorname{sen}(\omega_n\delta_n)=a_n\\ \alpha_n\cos(\omega_n\delta_n)=b_n\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \delta_n=\dfrac{1}{\omega_n}\operatorname{arc\,tg}(\dfrac{a_n}{b_n})\end{cases}$$

b) Para cada armónico (es decir, fijado n), en los antinodos se tiene $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}\,x)=\pm1$, que implica $x=\dfrac{(2j+1)L}{2n}$, $j=0,1,\cdots,n-1$.

c)

$$\Big(\frac{\partial U_n}{\partial t}\Big)^2=\alpha_n^2\omega_n^2\operatorname{sen}^2(\omega_n(t-\delta_n))\operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n}\,x),$$

$$\Big(\frac{\partial U_n}{\partial x}\Big)^2=\alpha_n^2\lambda_n\cos^2(\omega_n(t-\delta_n))\cos^2(\sqrt{\lambda_n}\,x),$$

$$\int_0^L\operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx=\int_0^L\cos^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx=\frac{L}{2},$$

$$E(t)=\frac12\rho\alpha_n^2\omega_n^2\frac{L}{2}\operatorname{sen}^2(\omega_n(t-\delta_n))+\frac12T_0\alpha_n^2\lambda_n\frac{L}{2}\cos^2(\omega_n(t-\delta_n))=\frac{1}{4L}T_0n^2\pi^2\alpha_n^2.$$

d) $a_1=0\quad\rightsquigarrow\quad\alpha_1=b_1=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(s)\operatorname{sen}(n\pi s/L)\,ds=\dfrac{8A}{\pi^2}\quad\rightsquigarrow\quad E_1=\dfrac{16T_0A^2}{L\pi^2}.$

Problema 4.1.8

a) Derivando, e integrando por partes el segundo sumando,

$$\begin{aligned}E'(t)&=\rho\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\,dx+T_0\int_0^L\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\,dx=\rho\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\,dx-T_0\int_0^L\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\\&=\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}(\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-T_0\frac{\partial^2u}{\partial x^2})\,dx=0,\end{aligned}$$

pues $u(0,t)=u(L,t)=0$ implica $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_0^L=0.$

b) Por linealidad basta demostrar que la única solución con datos iniciales cero es la solución cero. Como $E(t)=cte$, se tiene $E(t)=E(0)$ para todo $t\ge0$. Pero si $f=g=0$, la energía inicial es

$$E(0)=\frac{\rho}{2}\int_0^L(g(x))^2\,dx+\frac{T_0}{2}\int_0^L(f'(x))^2\,dx=0.$$

Así, para todo $t\ge0$,

$$\frac{\rho}{2}\int_0^L\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2dx+\frac{T_0}{2}\int_0^L\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2dx=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}=0\ \Rightarrow\ u=cte\ \Rightarrow\ u=0.$$

Problema 4.1.9 Por separación de variables

$$u(x,t) = a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \operatorname{sen}(cnt) + b_n \cos(cnt) \Big) \cos(nx).$$

La posición inicial implica $b_n = 0$ para todo $n \geq 0$. En cuanto a la velocidad inicial,

$$8 \operatorname{sen}^2 x = 4(1 - \cos(2x)) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cn \cos(nx),$$

nos da $a_0 = 4$, $a_2 = -2/c$, $a_n = 0$ para todo $n \neq 0$, 2. Así la solución es

$$u(x,t) = 4t - \frac{2}{c} \operatorname{sen}(2ct) \cos(2x).$$

Problema 4.1.10 Resolvamos con coeficiente genérico α en el término de amortiguamiento, en lugar de $2c$. Al separar variables $u(x,t) = X(x)T(t)$, la ecuación temporal es $T'' + \alpha T' + \lambda_n c^2 T = 0$, donde los autovalores, de la ecuación espacial, son $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$. La ecuación característica asociada a la ecuación en T tiene soluciones $r = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4c^2 n^2}}{2}$. Así pues la forma de la parte temporal depende del signo de $\alpha^2 - 4c^2 n^2$. Como el dato inicial es $u(x,0) = \operatorname{sen}(2x)$, sólo nos interesa el valor $n = 2$. La solución es entonces:

$$\begin{aligned}
&\textit{i)} \text{ si } \alpha < 4c \rightsquigarrow && u(x,t) = (a_2 \operatorname{sen}(zt) + b_2 \cos(zt)) \mathrm{e}^{-\alpha t/2} \operatorname{sen} 2x, \\
&\textit{ii)} \text{ si } \alpha = 4c \rightsquigarrow && u(x,t) = (c_2 t + g_2) \mathrm{e}^{-\alpha t/2} \operatorname{sen} 2x, \\
&\textit{iii)} \text{ si } \alpha > 4c \rightsquigarrow && u(x,t) = (h_2 \mathrm{e}^{wt} + j_2 \mathrm{e}^{-wt}) \mathrm{e}^{-\alpha t/2} \operatorname{sen} 2x,
\end{aligned}$$

donde $z = \dfrac{\sqrt{16c^2 - \alpha^2}}{2}$, $w = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - 16c^2}}{2}$. Los datos iniciales implican

$$a_2 = \frac{\alpha}{2z}, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = \frac{\alpha}{2}, \quad g_2 = 1, \quad h_2 = \frac{2w + \alpha}{4w}, \quad j_2 = \frac{2w - \alpha}{4w}.$$

Problema 4.1.11

a) Al separar variables $u(r\theta) = R(r)H(\theta)$, la parte radial verifica una ecuación equidimensional $r^2 R'' + rR' - \lambda_n R = 0$, donde a partir de la ecuación angular sabemos que $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$. Teniendo en cuenta la condición de no singularidad en $r = 0$, se tiene $R(r) = \begin{cases} r^n, & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$

Por tanto la solución, imponiendo el dato frontera, es

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) [\operatorname{sen} n\phi \operatorname{sen} n\theta + \cos n\phi \cos n\theta]\, d\phi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) P(r,\theta,\phi)\, d\phi,
\end{aligned}$$

donde el núcleo de Poisson es

$$\begin{aligned}
P(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n [\operatorname{sen} n\phi \operatorname{sen} n\theta + \cos n\phi \cos n\theta] \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \phi) \right].
\end{aligned}$$

b) Llamando $z = \dfrac{r}{a}\,\mathrm{e}^{(\theta-\phi)i}$, se tiene

$$\begin{aligned} P(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{e}^{n(\theta-\phi)i}\right] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[1+\frac{2z}{1-z}\right] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}e\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-|z|^2}{1-2\mathcal{R}e\, z+|z|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2}. \end{aligned}$$

Así

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2}\,f(\phi)\,d\phi.$$

c) Sustituyendo $r=0$, se tiene $u(0,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\,d\phi$.

Problema 4.1.12 Como $\operatorname{sen}^3\theta = \dfrac{1}{4}(3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}3\theta)$, es fácil obtener la solución $u(r,\theta) = \dfrac{1}{4}(3r\operatorname{sen}\theta - r^3\operatorname{sen}3\theta)$.

Problema 4.1.13

a) Por simetría impar alrededor del diámetro, es decir, alrededor de $\theta = 0$, la solución se obtiene a partir de la solución en todo el disco con dato frontera obtenido por reflexión impar, $\widetilde{g}(\theta) = \begin{cases} g(\theta), & 0<\theta<\pi, \\ -g(-\theta), & -\pi<\theta<0. \end{cases}$ Así

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{g}(\phi)P(r,\theta,\phi)\,d\phi \\ &= \int_{0}^{\pi} g(\phi)P(r,\theta,\phi)\,d\phi - \int_{-\pi}^{0} g(-\phi)P(r,\theta,\phi)\,d\phi \\ &= \int_{0}^{\pi} g(\phi)[P(r,\theta,\phi)-P(r,\theta,-\phi)]\,d\phi. \end{aligned}$$

También se puede separar variables directamente y se obtiene

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\phi)\operatorname{sen} n\phi\,d\phi\,\operatorname{sen} n\theta.$$

b) Reflejando ahora par, la solución es

$$u(r,\theta) = \int_0^{\pi} g(\phi)[P(r,\theta,\phi)+P(r,\theta,-\phi)]\,d\phi.$$

O también,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(\phi)\,d\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\phi)\cos n\phi\,d\phi\,\cos n\theta.$$

Problema 4.1.14 Separando variables, los autovalores son $\lambda_n = 9n^2$, $n \geq 1$, y la solución

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^{3n} \operatorname{sen}(3n\theta).$$

El dato frontera implica

$$\alpha_n = \frac{6}{\pi a^{3n}} \int_0^{\pi/3} f(s) \operatorname{sen}(3ns)\, ds.$$

Problema 4.1.15 *i*) La ecuación radial (equidimensional), $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$, tiene soluciones que verifiquen el dato $R(b) = 0$,

$$R(r) = \begin{cases} (b/r)^n - (r/b)^n, & n \geq 1, \\ \log(b/r), & n = 0. \end{cases}$$

Así la solución tiene la forma

$$u(r,\theta) = \beta_0 \log(b/r) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \operatorname{sen} n\theta + \beta_n \cos n\theta][(b/r)^n - (r/b)^n].$$

El dato en $r = a$ implica

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi[(b/a)^n - (a/b)^n]} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} ns\, ds, \quad n \geq 1, \\
\beta_0 &= \frac{1}{2\pi \log(b/a)} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds, \\
\beta_n &= \frac{1}{\pi[(b/a)^n - (a/b)^n]} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns\, ds, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

ii) Por linealidad se tiene $u = u_1 + u_2$, donde

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ u(a,\theta) = f(\theta), \\ u(b,\theta) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = 0, \\ u(a,\theta) = 0, \\ u(b,\theta) = g(\theta). \end{cases}$$

Ya hemos obtenido u_1. La solución u_2 se obtiene de forma análoga a u_1 intercambiando a por b. Juntando todo se tiene

$$u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(s)Q_1(r,\theta,s) + g(s)Q_2(r,\theta,s)]\, ds,$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_1(r,\theta,s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\log(b/r)}{\log(b/a)} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b/r)^n - (r/b)^n}{(b/a)^n - (a/b)^n} \cos(n(\theta - s)), \\
Q_2(r,\theta,s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\log(r/a)}{\log(b/a)} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r/a)^n - (a/r)^n}{(b/a)^n - (a/b)^n} \cos(n(\theta - s)).
\end{aligned}$$

iii)

$$u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(s) Q_3(r,\theta,s)\, ds,$$

donde

$$Q_3(r,\theta,s) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r/a)^n + (a/r)^n}{(b/a)^n + (a/b)^n} \cos(n(\theta - s)).$$

i) La condición de compatibilidad es $\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds = 0$, es decir, la cantidad total de flujo que sale por la frontera es cero. La solución es

$$u(r,\theta) = \beta_0 + \int_{-\pi}^{\pi} f(s) Q_4(r,\theta,s)\,ds,$$

donde

$$Q_4(r,\theta,s) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a[(r/b)^n + (b/r)^n]}{n[(a/b)^n - (b/a)^n]} \cos(n(\theta - s)),$$

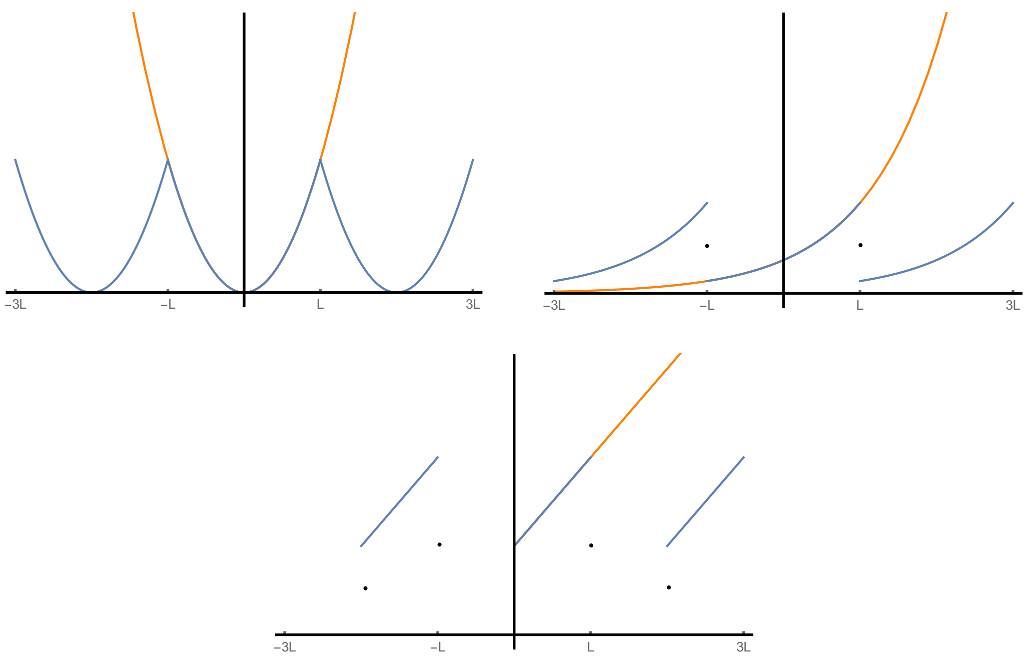
y $\beta_0 \in I\!R$ es un parámetro libre; no hay unicidad.

Problema 4.1.16 La solución es

$$u(r,\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r/a)^{2n} - (a/r)^{2n}}{(b/a)^{2n} - (a/b)^{2n}} \int_0^{\pi/2} f(s)\,\mathrm{sen}(2ns)\,ds\ \mathrm{sen}(2n\theta).$$

4.2. Series de Fourier

Problema 4.2.1



Problema 4.2.2 *i*) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\,\mathrm{sen}(nx)$. *ii*) $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{(2k+1)\pi}\,\mathrm{sen}((2k+1)x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\,\mathrm{sen}(4kx)$.

iii) $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{2\pi}{2k+1} - \frac{8}{\pi(2k+1)^3}\Big)\mathrm{sen}((2k+1)x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{k}\,\mathrm{sen}(2kx)$.

iv) $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}\,\mathrm{sen}(2kx)$.

Problema 4.2.3 Sea $f(x)$ una función par alrededor de $x = L/2$.

a) Demuestra que los coeficientes impares (n impar) de su serie de Fourier en cosenos sobre el intervalo $[0, L]$ son cero.

b) Obtén la serie de Fourier en cosenos de $f(x)$ sobre el intervalo $[0, L/2]$.

Solución:

a) Sea $f(x) = -f(L-x)$. Sabiendo que $\cos((n\pi(L-y)/L) = (-1)^n \cos(n\pi y/L)$, y haciendo el cambio de variables $L - x = y$ en la integral entre $L/2$ y L, se tiene

$$\begin{aligned} b_n = & \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\cos(n\pi s/L)\,ds \\ = & \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(s)\cos(n\pi s/L)\,ds + \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(y)(-1)^n\cos(n\pi y/L)\,dy = 0, \end{aligned}$$

siempre que n es impar.

b) De hecho, el cálculo anterior muestra que si n es par, $n = 2k$, el coeficiente correspondiente es

$$b_{2k} = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(s)\cos(2k\pi s/L)\,ds.$$

Por otro lado los coeficientes del desarrollo en $[0, L/2]$ son

$$c_m = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(s)\cos(2m\pi s/L)\,ds,$$

y se obtiene el mismo desarrollo.

Problema 4.2.4 No se puede derivar término a término la serie de Fourier en senos de $f(x)$ y obtener la serie de Fourier en cosenos de $f'(x)$ pues $f(x)$ es discontinua en $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 4.2.5 Sea la serie de Fourier en cosenos $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x/L)$. Derivando tenemos la serie de Fourier en senos $\mathrm{e}^x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} A_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$. Derivando otra vez, correctamente, resulta

$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{L}(\mathrm{e}^L - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n + \frac{2}{L}((-1)^n\mathrm{e}^L - 1)\right]\cos(n\pi x/L).$$

Igualando las series deducimos $A_n = \dfrac{2L((-1)^n\mathrm{e}^L - 1)}{L^2 + n^2\pi^2}$, $n \geq 1$, $A_0 = \dfrac{1}{L}(\mathrm{e}^L - 1)$.

Problema 4.2.6 Sea la serie de Fourier en senos $\cosh x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$. Derivando tenemos la serie de Fourier en cosenos

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{L}(\cosh L - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi}{L} b_n + \frac{2}{L}((-1)^n\cosh L - 1)\right]\cos(n\pi x/L).$$

Derivando otra vez resulta

$$\cosh x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi}{L} \right) \left[\frac{n\pi}{L}\, b_n + \frac{2}{L}((-1)^n \cosh L - 1) \right] \operatorname{sen}(n\pi x/L).$$

Igualando las series de Fourier en senos deducimos $b_n = \dfrac{2n\pi(1 - (-1)^n \cosh L)}{L^2 + n^2\pi^2}$.

– $\mathcal{A}_{\delta}$P–
– $\mathcal{ERC}$–

CC BY NC SA