

**uc3m**

Universidad **Carlos III** de Madrid

Departamento de Matemáticas

## CÁLCULO III. Resolución Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 6

Arturo de Pablo  
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M  
<http://ocw.uc3m.es/matematicas>



## 6. Transformada de Fourier

### 6.1. Propiedades básicas

**Problema 6.1.1** a)  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1;$

b)  $\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(\alpha x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y/\alpha} dy = \widehat{f}(\omega/\alpha);$

c)  $\int_{\mathbb{R}^n} \beta f(\alpha \vec{x}) d\vec{x} = \beta \alpha^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) d\vec{y} = 1$  si  $\beta = \alpha^n;$

b)  $\widehat{g}(\vec{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^n f(\alpha \vec{x}) e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{x}} d\vec{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{y}/\alpha} d\vec{y} = \widehat{f}(\vec{\omega}/\alpha).$

**Problema 6.1.2** a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\beta(x-x_0)^2} dx = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\pi} = 1$  si  $\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}};$

b) el límite  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta(x-x_0)^2} = 0$  es obvio pues la exponencial domina a la potencia  $\sqrt{\beta}$ , siempre que  $x \neq x_0$ ;

c)  $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{i\omega x_0} \mathcal{F}(e^{-\beta x^2})(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta} + i\omega x_0} \rightarrow \frac{1}{2\pi} e^{i\omega x_0};$

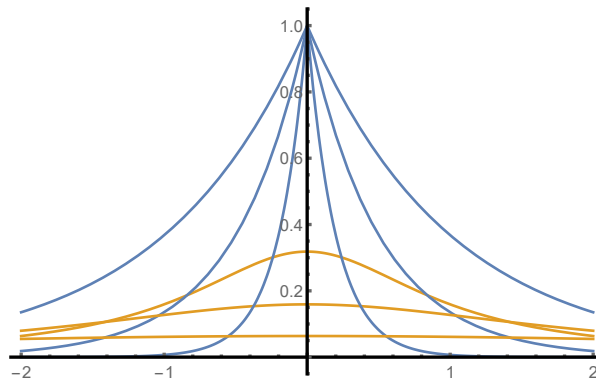
d)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega x_0};$

e)  $\mathcal{K}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ , verifica los apartados a) y b) con  $\beta = \frac{1}{4kt} \rightarrow 0$ .

**Problema 6.1.3**  $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{i\omega x} dx = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2\pi i\omega} = \frac{\text{sen } \omega}{\pi\omega}.$

### Problema 6.1.4

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} e^{i\omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{i\omega x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha + i\omega} - \frac{1}{-\alpha + i\omega} \right) = \frac{\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}. \end{aligned}$$



**Problema 6.1.5**  $\mathcal{F}(\Delta f)(\vec{\omega}) = \mathcal{F} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right) (\vec{\omega}) = \sum_{j=1}^n (-i\omega_j)^2 \widehat{f}(\vec{\omega}) = -|\vec{\omega}|^2 \widehat{f}(\vec{\omega}).$

**Problema 6.1.6** Por la definición de convolución,

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy;$$

por la definición de transformada de Fourier inversa, además de la transformada de la convolución,

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\widehat{h}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

**Problema 6.1.7** Calculamos la transformada de Fourier,  $\mathcal{F}(-u'' + u)(\omega) = (|\omega|^2 + 1)\widehat{u}(\omega) = (|\omega|^2 + 1)\widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ ; por tanto  $-u'' + u = f$ .

### 6.2. Transformación de ecuaciones

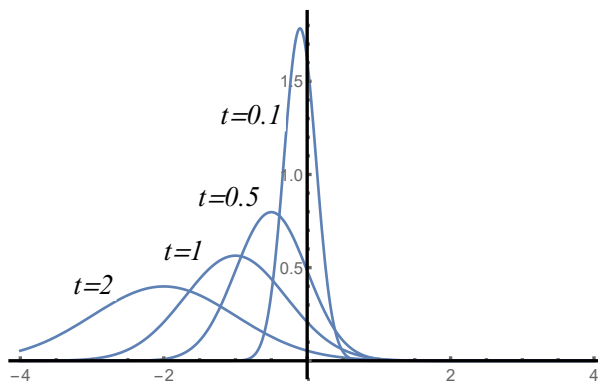
**Problema 6.2.1**  $\mathcal{F}(-u'' + \lambda^2 u)(\omega) = \widehat{f}(\omega) \rightsquigarrow (|\omega|^2 + \lambda^2)\widehat{u}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \rightsquigarrow \widehat{u}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{|\omega|^2 + \lambda^2}$ ; por tanto  $u = f * g$  donde  $\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{|\omega|^2 + \lambda^2}$ ; esto implica  $g(x) = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|x|}$ . La solución es finalmente  $u(x) = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\lambda|x-y|} dy$ .

**Problema 6.2.2** a) Transformando el problema se obtiene 
$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -k\omega^2 \widehat{u} - ci\omega \widehat{u}, & t > 0, \\ \widehat{u} = \widehat{f}, & t = 0, \end{cases}$$

que da  $\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega) e^{-(k\omega^2 + ci\omega)t}$ , es decir,

$$u(x, t) = f * K(x + ct, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+ct-y)^2}{4kt}} f(y) dy.$$

b)  $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x+ct)^2}{4kt}}$ , que es una gaussiana que a la vez que con el tiempo se rescala disminuyendo y extendiéndose, se va desplazando hacia la izquierda, si  $c > 0$ , con un máximo en  $x = -ct$ .



c) Si ponemos  $u(x, t) = v(x + ct, t)$ , se obtiene que  $v$  satisface la ecuación del calor.

**Problema 6.2.3** a) Transformando el problema se obtiene 
$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -k\omega^2 \hat{u} - \gamma \hat{u}, & t > 0, \\ \hat{u} = \hat{f}, & t = 0, \end{cases}$$

que da  $\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-(k\omega^2 + \gamma)t}$ , y por tanto

$$u(x, t) = e^{-\gamma t} f * K(x, t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy.$$

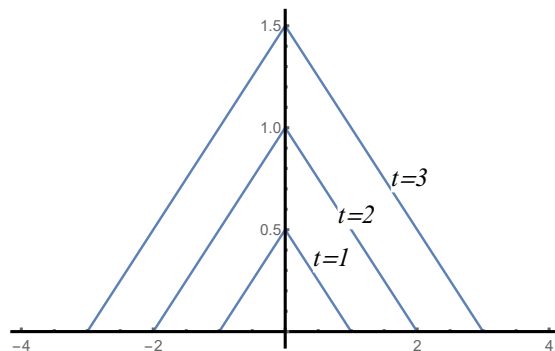
b) Si ponemos  $u(x, t) = e^{-\gamma t} v(x, t)$ , se obtiene que  $v$  satisface la ecuación del calor.

**Problema 6.2.4** a)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-a}^0 (a+x)e^{i\omega x} dx + \int_0^a (a-x)e^{i\omega x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a (a-x)(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a (a-x) \cos \omega x dx = \frac{1 - \cos a\omega}{\pi\omega^2}. \end{aligned}$$

b) Transformando el problema se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \hat{u} + \frac{1}{2\pi}, & t > 0, \\ \hat{u} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = 0, & t = 0, \end{cases} \quad \text{que da } \hat{u}(\omega, t) = \frac{1 - \cos \omega t}{2\pi\omega^2} \rightsquigarrow u(x, t) = \frac{1}{2}(t - |x|)_+.$$



**Problema 6.2.5** Transformando el problema se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \omega^2 \hat{u} = 0, & 0 < x < L, \\ \hat{u} = \hat{g}_1, & x = 0, \\ \hat{u} = \hat{g}_2, & x = L, \end{cases} \quad \text{que da } \hat{u}(x, \omega) = \hat{g}_1(\omega) \frac{\sinh((L-x)\omega)}{\sinh(L\omega)} + \hat{g}_2(\omega) \frac{\sinh(x\omega)}{\sinh(L\omega)}.$$

La solución es entonces  $u = g_1 * F_1 + g_2 * F_2$ , donde  $F_1$  y  $F_2$  son las transformadas inversas de  $\frac{\sinh((L-x)\omega)}{\sinh(L\omega)}$  y  $\frac{\sinh(x\omega)}{\sinh(L\omega)}$  respectivamente.

- A<sub>5</sub>P-  
- ERC-

