uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 2

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

2. Ecuaciones lineales de orden superior

2.1. Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes

Problema 2.1.1 Resuelve las siguientes ecuaciones de orden dos

$$i)\quad y''+2y'-3y=0\,,\qquad ii)\quad y''=4y\,,$$

$$iii)\quad y''+4y'-5y=0\,,\qquad iv)\quad y''+8y=0\,,$$

$$v)\quad y''+4y'+5y=0\,,\qquad vi)\quad 2y''+2y'+3y=0\,,$$

Problema 2.1.2 Halla la solución general de las siguientes ecuaciones no homogéneas:

$$i)\quad y''+3y'-10y=6\mathrm{e}^{4x},\qquad ii)\quad y''-2y'+5y=25x^2+12,$$

$$iii)\quad y''-y'-6y=20\mathrm{e}^{-2x},\qquad iv)\quad y''-3y'+2y=10\,\mathrm{sen}\,2x,$$

$$v)\quad y''-2y'+y=e^x+e^{-2x},\qquad vi)\quad y''-y=x\,\mathrm{sen}\,x,$$

$$vii)\quad y''-6y'+9y=5e^x\,\mathrm{sen}\,x,\qquad viii)\quad y''+y'+y+1=\mathrm{sen}\,x+x+x^2.$$

Problema 2.1.3 Halla la solución general de las ecuaciones:

$$i)\quad y'''-3y''+2y'=0,\qquad ii)\quad y'''-y=0,$$

$$iii)\quad y^{(4)}-2a^2y''+a^4y=0,\qquad iv)\quad y'''-3y'+2y=3x^2+x,$$

$$v)\quad y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=e^x.$$

Problema 2.1.4 Determinar la ecuación diferencial lineal homogénea a partir del sistema fundamental de soluciones que se indican

$$i)\quad \{1,\mathrm{e}^x\}\qquad ii)\quad \{\mathrm{sen}\,3x,\,\cos 3x\}$$

$$iii)\quad \{\mathrm{e}^{-2x},\,x\mathrm{e}^{-2x}\}\qquad iv)\quad \{\mathrm{e}^{2x},\,\mathrm{sen}\,x,\,\cos x\}$$

$$v)\quad \{\mathrm{e}^x,\,x\mathrm{e}^x,\,x^2\mathrm{e}^x\}$$

Problema 2.1.5 Dada la ecuación $y''+ay'+by=f$, se sabe que las siguientes funciones son solución: $y_1(x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-3x}$, $y_2(x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x}$, $y_3(x)=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-3x}$. Determinar a, b y f y obtener la solución general.

Problema 2.1.6 Se considera la ecuación diferencial

$$x'''(t)+2x''(t)-x'(t)-2x(t)=40e^{3t}.$$

a) Comprueba que $x(t)=e^{3t}$ es una solución.

b) Halla la solución que cumple $x(0)=2,\ \ x'(0)=x''(0)=7$.

Problema 2.1.7 Halla las soluciones de los problemas de valores iniciales siguientes

$$\begin{array}{rll} i) & x'' + 4x' + 3x = 0, & x(0) = 0,\ x'(0) = 1; \\ ii) & x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0, & x(1) = -2,\ x'(1) = x''(1) = 0; \\ iii) & x^{(5)} + 4x^{(4)} + 5x^{(3)} = 0, & x(0) = x'(0) = x''(0) = 1,\ x^{(3)}(0) = x^{(4)}(0) = 0; \\ iv) & x^{(5)} + 4x^{(4)} + 3x^{(3)} = 0, & x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x^{(3)}(0) = 1,\ x^{(4)}(0) = -1. \end{array}$$

Problema 2.1.8 Resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, \\ y(0) = \dfrac{1}{2},\ y'(0) = \dfrac{5}{2},\ y''(0) = -\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Problema 2.1.9 Encuentra una solución particular para cada una de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{rlrl} i) & y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x, & ii) & y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x, \\ iii) & y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}, & iv) & y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x. \end{array}$$

Problema 2.1.10 Resuelve las ecuaciones diferenciales de Euler:

$$\begin{array}{rlrl} i) & x^2y'' - 4xy' + 4y = 0\,, & ii) & x^2y'' + xy' - n^2y = 0\,, \quad n \neq 0\,, \\ iii) & x^2y'' + xy' = 0\,, & iv) & x^3y''' + 3x^2y'' = 0\,, \\ v) & x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0\,, & vi) & x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0\,, \\ vii) & x^2y'' + 3xy' + y = 3x^2\,, & viii) & x^3y''' + xy' - y = 3x^4\,. \end{array}$$

Problema 2.1.11 Encuentra una segunda solución de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

sabiendo que una solución es $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

Problema 2.1.12 Encuentra la solución general de las ecuaciones siguientes usando una solución dada de la ecuación homogénea:

$$\begin{array}{rll} i) & (x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2, & y_1(x) = x\,, \\ ii) & (x^2+x)y'' + (2-x^2)y' - (2+x)y = x(x+1)^2, & y_1(x) = 1/x\,. \end{array}$$

2.2. Aplicaciones

Problema 2.2.1 Para determinar la resistencia de una pequeña esfera que se mueve con velocidad constante en un fluido viscoso es necesario resolver la ecuación diferencial de Euler

$$t^3x'''' + 8t^2x''' + 8tx'' - 8x' = 0$$

Halla su solución general.

Problema 2.2.2 La ecuación diferencial que regula un circuito LRC viene dada por

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + C^{-1}I = \frac{dE}{dt},$$

donde $E(t) = 10 \operatorname{sen} 2t$ designa la fuerza electromotriz del circuito y $L = 10h$, $R = 20\Omega$, $C = 0{,}01f$. Determina la intensidad de corriente del circuito si la corriente inicial y la carga inicial del condensador son nulas.

Problema 2.2.3 Se considera un muelle al que cuando se le aplica una fuerza de $100Nw$ se estira $2m$. Se coloca sobre una mesa, se le une una masa de $0{,}5kg$ y se estira $50cm$ a la vez que se le imprime una velocidad contraria al estiramiento de $15m/s$. Si el rozamiento con la mesa es de $6kg/s$, calcular la evolución de la posición del cuerpo en función del tiempo.

Problema 2.2.4 Se considera el problema masa-resorte al que se le aplica una fuerza externa periódica

$$\begin{cases} 2u'' = -8u + \cos \omega t, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Resuelve el problema para $|\omega| \neq 2$.

b) Calcula el límite de la solución obtenida cuando $\omega \to 2$.

c) Resuelve el problema para $\omega = 2$.

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–