uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III. Problemas

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Tema 5

Arturo de Pablo
Elena Romera

Open Course Ware, UC3M
http://ocw.uc3m.es/matematicas

5. Problemas de Sturm-Liouville

5.1. Autovalores y autofunciones

Problema 5.1.1 Determina los autovalores y autofunciones de los problemas de Sturm-Liouville obtenidos con la ecuación $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ en el intervalo $0 < x < 1$, con las condiciones de contorno siguientes:

$$i)\quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \qquad ii)\quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,$$

$$iii)\quad \varphi(0) = \varphi'(1) = 0.$$

Problema 5.1.2 Determina los autovalores y autofunciones de los problemas siguientes:

$$i)\quad y'' + y' + (1+\lambda)y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0;$$

$$ii)\quad y'' - 3y' + 3(1+\lambda)y = 0, \qquad y'(0) = y'(1) = 0;$$

$$iii)\quad y'' + 2y' + (1-\lambda)y = 0, \qquad y(0) = y'(1) = 0.$$

Problema 5.1.3 Demuestra que los autovalores del problema

$$\begin{cases} \phi'' + (\lambda - x^2)\phi = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0, \end{cases}$$

son estrictamente positivos.

Problema 5.1.4 Usa el cociente de Rayleigh, y una función test adecuada, para obtener una cota superior para el primer autovalor de los siguientes problemas:

$$i)\quad \varphi'' + (\lambda - x^2)\varphi = 0, \qquad \varphi'(0) = \varphi(1) = 0;$$

$$ii)\quad \varphi'' + (\lambda - x)\varphi = 0, \qquad \varphi'(0) = 2\varphi(1) + \varphi'(1) = 0;$$

$$iii)\quad \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(1) + \varphi'(1) = 0.$$

5.2. Series generalizadas de Fourier

Problema 5.2.1 Considera el problema del flujo de calor con convección

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V_0\dfrac{\partial u}{\partial x}, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

a) Demuestra que la EDO espacial obtenida por separación de variables no es de tipo Sturm-Liouville.

b) Resuelve el problema.

Problema 5.2.2 Sea la EDO

$$\phi'' + \alpha(x)\,\phi' + [\lambda\,\beta(x) + \gamma(x)]\,\phi = 0.$$

Determina el factor $H(x)$ por el que hay que multiplicar esta ecuación de tal modo que quede reducida a la forma de Sturm-Liouville

$$\left[p(x)\,\phi'\right]' + [\lambda\,\sigma(x) + q(x)]\,\phi = 0.$$

Problema 5.2.3 Aplicar el problema anterior a

$$\begin{cases} x^2\,\phi'' + x\,\phi' + \lambda\,\phi = 0, & 1 < x < b, \\ \phi(1) = \phi(b) = 0. \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el factor integrante?

b) Demuestra que $\lambda \geq 0$.

c) Puesto que la EDO es equidimensional (Euler), determina todos los autovalores positivos. ¿Es $\lambda = 0$ autovalor?

d) ¿Son ortogonales las autofunciones? ¿Con qué función peso? Verifica la ortogonalidad haciendo las integrales correspondientes.

e) Comprueba que la n-ésima autofunción tiene $n-1$ ceros en el intervalo $(1, b)$.

Problema 5.2.4 Resuelve el problema para la ecuación del calor radial en un disco

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{k}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 < r < a,\ t > 0, \\ u(a,t) = 0, & t > 0, \\ u(r,0) = f(r), & 0 < r < a. \end{cases}$$

Problema 5.2.5 Considérese la EDP asociada al operador de ondas unidimensional

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial t}.$$

a) Da una breve interpretación física. ¿Qué signos deben tener α y β de acuerdo con esta interpretación?

b) Supón que ρ, α, β son funciones de x. Demuestra que el método de separación de variables se aplica solo si $\beta = c\rho$, donde c es una constante.

c) Si $\beta = c\rho$, demuestra que la ecuación espacial es de Sturm-Liouville. Resuelve la ecuación temporal.

Problema 5.2.6 Resuelve el problema del telegrafista

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial u}{\partial t} + bu = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Problema 5.2.7 Sea el problema de autovalores en un rectángulo

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0, & 0 < x < L,\ 0 < y < H, \\ \phi(x,0) = \phi(x,H) = 0, & 0 < x < L, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(L,y) = 0, & 0 < y < H. \end{cases}$$

a) Descompónlo en dos problemas unidimensionales de autovalores y calcula así los autovalores y autofunciones.

b) Demuestra que la mayor parte de los autovalores llevan asociadas más de una autofunción linealmente independiente en los casos $L = H$ y $L = 2H$.

c) Demuestra que las autofunciones son ortogonales sobre la región bidimensional dada usando dos relaciones de ortogonalidad unidimensionales.

Problema 5.2.8 El desplazamiento vertical de una membrana no uniforme $\Omega \subset I\!R^2$ satisface la ecuación de ondas
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$
donde $c = c(x, y)$, y se impone la condición $u = 0$ sobre la frontera de la membrana, que tiene forma irregular. Al separar variables se obtiene un problema de autovalores para el laplaciano en Ω.

a) Prueba que las autofunciones pertenecientes a autovalores distintos son ortogonales. ¿Con qué peso?

b) Prueba que $\lambda \geq 0$. ¿Puede ser $\lambda = 0$ autovalor?

c) Suponiendo conocidos estos autovalores, determina las frecuencias de vibración.

Problema 5.2.9 Sea una membrana vibrante que ocupa un sector circular recto, $\{0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi/2\}$, con $u = 0$ sobre toda su frontera, y sea $c > 0$ la velocidad de propagación.

a) Determina las frecuencias de vibración.

b) Resuelve el problema de valores iniciales si
$$u(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0.$$

Problema 5.2.10 Resuelve la ecuación del calor en un cilindro concondiciones de contorno homogéneas,
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\Delta u, & 0 < r < a,\ 0 < z < H, \\ u(r, \theta, 0, t) = 0, & \\ u(r, \theta, H, t) = 0, & \\ u(a, \theta, z, t) = 0, & \\ u(r, \theta, z, 0) = f(r, z), & \end{cases}$$
observando que la condición inicial es independiente de θ.

Problema 5.2.11 Resuelve la ecuación del calor en un cuarto de cilindro $\{0 < \theta < \pi/2,\ 0 < r < a,\ 0 < z < H\}$, si las condiciones de contorno son Neumann homogéneas, es decir,
$$\frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, H, t) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, z, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi/2, z, t) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z, t) = 0,$$

y con la condición inicial $u(r, \theta, z, 0) = f(r, \theta, z)$. Explicar qué distribución de temperatura se espera alcanzar cuando $t \to \infty$.

– $\mathcal{A}_\delta$P–
– $\mathcal{ERC}$–