Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CALCULO III
EXAMEN EXTRAORDINARIO - SOLUCIONES

17 de junio de 2015

Tercer Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

Tiempo: 3 horas

Problema 1 (**1,5 puntos**)

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3.$$

SOLUCIÓN:
Es de tipo Bernoulli con $n = 3$, hacemos el cambio:

$$z = y^{1-3} = y^{-2} \quad \Longrightarrow \quad z' = -2y^{-3}y' \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{-z'y^3}{2}.$$

Sustituimos y resolvemos la ecuación lineal obtenida:

$$\frac{-z'y^3}{2} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3 \quad \Longrightarrow \quad z' + 10z = 5x$$

$$\Longrightarrow \quad z = e^{-\int 10dx}\left[\int 5xe^{\int 10dx}dx + C\right] = e^{-10x}\left[\frac{xe^{10x}}{2} - \frac{e^{10x}}{20} + C\right] = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}}}.$$

Problema 2 (**2 puntos**)

Resolver la ecuación de segundo grado:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x.$$

SOLUCIÓN:
Usando el método de los coeficientes indeterminados, obtenemos la solución de la parte homogénea:

$$y_h(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)\,.$$

Proponiendo ahora una solución particular de la forma $y_p(x) = x(Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\operatorname{sen} x)$, obtenemos $A = 0, B = \frac{1}{2}$, así, la solución queda:

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \frac{xe^{-x}\operatorname{sen} x}{2}\,.$$

Problema 3 (**2 puntos**)

Resolver la ecuación integro-diferencial

$$f'(x) + \int_0^x 4 \cdot f(x-t)\, dt = x - \operatorname{sen} x, \qquad f(0) = 2.$$

Solución:
La ecuación es $f'(x) + 4 * f(x) = x - \operatorname{sen} x$ donde $*$ denota la convolución. Así, aplicando la transformada de Laplace llegamos a

$$sF(s) - f(0) + \frac{4}{s} \cdot F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Luego,

$$\frac{s^2+4}{s} \cdot F(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s^2+1)} + 2$$

y de aquí obtenemos:

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2+1^2) \cdot (s^2+2^2)} + \frac{2s}{s^2+2^2}$$

Descomponiendo en fracciones simples la primera fracción (la segunda ya lo está) se obtiene:

$$F(s) = -\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1^2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{s}{s^2+2^2} = -\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1^2} + \frac{25}{12} \cdot \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s}$$

Y por tanto la función buscada es

$$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos x + \frac{25}{12} \cdot \cos 2x + \frac{1}{4}.$$

Problema 4 (**2,5 puntos**)

Utilizando el método de la separación de variables, resolver la ecuación del telégrafo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \quad x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x, & x \in [0,\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Solución:
Proponemos una solución de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, y así obtenemos los problemas:

$$\begin{cases} T'' + 2T' + (1+\lambda)T = 0, \\ T'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

El problema de la variable espacial es bien conocido, únicamente en el caso en que $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, genera las soluciones no triviales:

$$X_n(x) = k \operatorname{sen}(nx), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Resolvemos la ecuación

$$T'' + 2T' + (1 + n^2)T = 0,$$

obteniendo la solución general

$$T_n(t) = e^{-t}(A\cos(nt) + B\,\mathrm{sen}(nt)), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

La solución general queda:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t}\Big(A\cos(nt) + B\,\mathrm{sen}(nt)\Big)\,\mathrm{sen}(nx)\,.$$

Así, utilizando las condiciones iniciales, obtenemos:

$$u(x,t) = e^{-t}(\cos t + \mathrm{sen}\, t)\,\mathrm{sen}\, x.$$

Problema 5 (**0,5 + 1 + 0,5 = 2 puntos**)

a) Transformar en un problema de Sturm-Liouville el siguiente:

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, & 1 < x < b, \\ y(1) = y(b) = 0. \end{cases}$$

b) Encontrar las autofunciones y los autovalores.

c) Encontrar la relación de ortogonalidad que satisfacen las autofunciones.

Solución:

a) Transformamos el problema en uno de Sturm-Liouville buscando un factor integrante. Con $H(x) = 1/x$ se tiene

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0.$$

b) La ecuación es de Euler con solución de la forma $y = x^m$. Al sustituir en la ecuación obtenemos

$$m(m-1) + m + \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Cuando $\lambda > 0$ la solución es:

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\log x) + c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\log x).$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$y(1) = c_1 = 0, \quad y(b) = c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\log b) = 0.$$

Si $c_2 \neq 0$, entonces

$$\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\log b) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda}\log b = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto, los autovalores son:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\log b}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y las autofunciones correspondientes son

$$y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\log b}\log x\right).$$

Para $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$ se demuestra que no son autovalores por el Cociente de Rayleigh:

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_0^b (y')^2 x\, dx}{\displaystyle\int_1^b y^2 \frac{1}{x}\, dx} \geq 0$$

Si $\lambda = 0$ se obtiene $y' = 0$, que a su vez lleva a $y = 0$ por las condiciones de contorno.

(b) Por el primer apartado, dos autofunciones y_n, y_m satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_1^b y_n(x)\, y_m(x)\, \frac{1}{x} dx = 0, \quad n \neq m,$$
