Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

CALCULO III
EXAMEN FINAL - SOLUCIONES
23 de enero de 2015
Tercer Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

Tiempo: 3 horas

Problema 1 (**2 puntos**)

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y\,dx + x(\log x - \log y - 1)\,dy = 0; \qquad y(1) = \mathrm{e}.$$

Solución:
La ecuación diferencial es homogénea porque porque despejando y' queda una función homogénea de grado 0:

$$y' = \frac{y/x}{1 + \log \frac{y}{x}}.$$

Se resuelve mediante el cambio $z = \dfrac{y}{x}$, $y' = z + x\dfrac{dz}{dx}$ quedando:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{1+\log z} \quad \Longrightarrow \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{-z\log z}{1+\log z} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1+\log z}{z\log z}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

Integramos, dejamos que la constante absorba los signos de los valores absolutos y deshacemos el cambio:

$$\log|z\log z| = \log\frac{k}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{x}\log\frac{y}{x} = \frac{k}{x} \quad \Longrightarrow \quad y\log\left(\frac{y}{x}\right) = k.$$

Con el dato: $\quad y\log\left(\dfrac{y}{x}\right) = \mathrm{e}.$

Problema 2 (**2 puntos**)

Demostrar que no es exacta la siguiente ecuación y resolverla con un factor integrante.

$$(x+y)\,dx + x\log(x)\,dy = 0, \quad x > 0.$$

Solución:
No es exacta porque no coinciden las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = \log(x) + 1.$$

Buscamos un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x)(x+y)dx + \mu(x)x\log(x)dy = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(x+y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)x\log(x))$$

$$\Longrightarrow \quad \mu(x) = \mu'(x)x\log(x) + \mu(x)(\log(x)+1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{-1}{x},$$

$$\Longrightarrow \quad \log(\mu(x)) = -\log(x) \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Sustituímos y resolvemos la ecuación exacta obtenida:

$$\left(-1-\frac{y}{x}\right)dx-\log(x)dy=0$$

La solución es $f(x,y)=0$ donde:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-1-\dfrac{y}{x}\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\log(x)\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} f(x,y)=\displaystyle\int(-1-\frac{y}{x})dx=-x-y\log(x)+C(y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\log(x)=\log(x)+C'(y) \quad \implies \quad C'(y)=0\end{array}\right.$$

Luego la solución es: $x+y\log(x)=K$.

Problema 3 (**2 puntos**)

Resuelver la ecuación integral:

$$f(t)=1+t+\frac{8}{3}\int_0^t(t-u)^3f(u)\,du$$

SOLUCIÓN:

Hay una convolución: $\dfrac{8}{3}\displaystyle\int_0^t(t-u)^3f(u)du$ es la convolución de t^3 con $f(t)$. Transformamos por Laplace y obtenemos:

$$L\Big[f(t)\Big](s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{8}{3}\,L\Big[t^3\Big](s)L\Big[f(t)\Big](s)=\frac{s+1}{1}s^2+\frac{16}{3s^4}L\Big[f(t)\Big](s)$$

Despejamos, descomponemos en fracciones simples:

$$L\Big[f(t)\Big](s)=\frac{(s+1)s^2}{s^4-16}=\frac{3/8}{s-2}+\frac{1/8}{s+2}+\frac{s/2}{s^2+4}+\frac{1/2}{s^2+4},$$

y antitransformamos:

$$f(t)=\frac{1}{8}\left(3\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}+4\cos 2t+2\operatorname{sen}2t\right).$$

Problema 4 (**2,5 puntos**)

Resuelver el siguiente problema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-2t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ t>0,\\ u(-\pi/2,t)=u(\pi/2,t), & t>0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(-\pi/2,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi/2,t), & t>0,\\ u(x,0)=4\operatorname{sen}^2(4x)+2\operatorname{sen}(6x), & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Separamos variables: $u(x,t)=\phi(x)G(t)$ y obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l}\phi''(\theta)+\lambda\phi(\theta)=0,\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ \phi(-\frac{\pi}{2})=\phi(\frac{\pi}{2}),\\ \phi'(-\frac{\pi}{2})=\phi'(\frac{\pi}{2}).\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l}\lambda_n=4n^2,\quad n=0,1,2,\dots\\ \phi_n(\theta)=c_1\cos(2n\theta)+c_2\operatorname{sen}(2n\theta).\end{array}\right.$$

$$G'(t) + 8n^2 tG(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad G_n(t) = K\mathrm{e}^{-4n^2t^2}$$

Calculammos la solución producto y usamos el principio de superposición y obtenemos:

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-4n^2t^2}\Big(A_n \cos(2n\theta) + B_n \operatorname{sen}(2n\theta)\Big).$$

Sustituimos el dato inicial:

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos(2n\theta) + B_n \operatorname{sen}(2n\theta)\Big) = 4\operatorname{sen}^2(4x) + 2\operatorname{sen}(6x) = 2(1-\cos(8x)) + 2\operatorname{sen}(6x).$$

Resulta entonces que:

$$A_0 = 2, \quad A_4 = -2, \quad A_n = 0,\ n \neq 0,4; \quad B_3 = 2, \quad B_n = 0,\ n \neq 3.$$

Y la solución es:

$$u(x,t) = 2 + 2\mathrm{e}^{-36t^2}\operatorname{sen}(6x) - 2\mathrm{e}^{-64t^2}\cos(8x).$$

Problema 5 (1,5 puntos)

Determinar todos los autovalores negativos del problema:

$$\begin{cases} \phi'' + 5\phi = -\lambda\phi, \\ \phi(0) = 0, \quad \phi(\pi) = 0. \end{cases}$$

Solución:

Resolvemos la ecuación buscando soluciones: $\phi(x) = \mathrm{e}^{rx}$:

$$\phi'' + (5+\lambda)\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm\sqrt{-5-\lambda}.$$

Con los datos obtenemos que si $\lambda + 5 < 0$:

$$\phi(x) = C_1 \cosh(x\sqrt{5+\lambda}) + C_2 \operatorname{senh}(x\sqrt{5+\lambda}), \Longrightarrow \begin{cases} \phi(0) = C_1 = 0, \\ \phi(\pi) = C_2 \operatorname{senh}(\pi\sqrt{5+\lambda}) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

Esto es, no hay autovalores en este caso. Para $\lambda + 5 = 0$, es decir, $\lambda = -5$:

$$\phi'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = C_1 x + C_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \phi(0) = C_2 = 0, \\ \phi(\pi) = C_1\pi = 0 \Longrightarrow C_1 = 0. \end{cases}$$

Tampoco en este caso los hay. Por último, si $\lambda + 5 > 0$:

$$\phi(x) = C_1 \cos(x\sqrt{5+\lambda}) + C_2 \operatorname{sen}(x\sqrt{5+\lambda}), \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \phi(0) = C_1 = 0, \\ \phi(\pi) = C_2 \operatorname{sen}(\pi\sqrt{5+\lambda}) = 0. \end{cases}$$

para que se cumpla:

$$\pi\sqrt{5+\lambda} = n\pi, \quad \Longrightarrow \quad \lambda_n + 5 = n^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = n^2 - 5, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto, los autovalores negativos son: $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -1$.
