

CÁLCULO III
EXAMEN FINAL

22 de enero de 2016

Tercer Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

Tiempo: 3 horas

Problema 1. (2 puntos)

a) Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2}$$

b) Resolver la siguiente ecuación diferencial encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable

$$(xy - 1) dx + (x^2 - xy) dy = 0$$

Problema 2. (2 puntos)

a) Resolver el siguiente problema mediante transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{-x} - 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Resolver el siguiente problema directamente sin hacer uso de la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y''' - y'' - 2y' = -3e^{-x}, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1. \end{cases}$$

Problema 3. (2 puntos) Dado el problema para la ecuación del calor no homogénea

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16 \operatorname{sen} 2x & 0 < x < 2\pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 5 \operatorname{sen} 2x & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

encontrar una solución en la forma $u(x, t) = A(t) \operatorname{sen} mx$.

Problema 4. (2 puntos) Resolver el problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5u & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} x + 6 \operatorname{sen} 2x & 0 < x < \pi \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Problema 5. (2 puntos) Resolver el problema para la ecuación de Laplace en un cuarto de anillo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 2 < r < 4, 0 < \theta < \pi/2 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r, 0) = 0 & 2 < r < 4 \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi/2) = 0 & 2 < r < 4 \\ u(2, \theta) = 0 & 0 < \theta < \pi/2 \\ u(4, \theta) = f(\theta) & 0 < \theta < \pi/2 \end{cases}$$
