Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemáticas

CÁLCULO III
EXAMEN EXTRAORDINARIO. RESOLUCIÓN

15 de junio de 2016

Tercer Curso del Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

Tiempo: 3 horas

Problema 1. (**2 puntos**) Resolver las ecuaciones diferenciales:

$$\textbf{a)}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{xy-x^2}, \qquad \textbf{b)}\quad (ye^x+y^3)\,dx+(xy^2+2y-e^x)\,dy=0$$

---

a) Se trata de una ecuación homogénea. Mediante el cambio $z=y/x$ obtenemos la ecuación de variables separables

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{2z^2}{z-1}-z\right)=\frac{z^2+z}{x(z-1)}.$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z^2+z}\,dz=\frac{1}{x}\,dx \quad &\Rightarrow\ 2\log|z+1|-\log|z|=\log|x|+c\\ &\Rightarrow\ \frac{(z+1)^2}{zx}=k\ \Rightarrow\ (x+y)^2=kx^2y.\end{aligned}$$

b) Comprobamos que no es exacta ($e^x+3y^2\neq y^2-e^x$). A continuación, buscando un factor integrante $\mu=\mu(x)$, tenemos que para que la nueva ecuación sea exacta debe verificarse

$$\frac{\partial}{\partial y}((ye^x+y^3)\mu)=\frac{\partial}{\partial x}((xy^2+2y-e^x)\mu)\ \Rightarrow\ \frac{\mu'}{\mu}=\frac{2e^x-2y^2}{xy^2+2y-e^x},$$

que es imposible pues el miembro de la derecha no depende sólo de x. Intentamos entonces $\mu=\mu(y)$. Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}((ye^x+y^3)\mu)=\frac{\partial}{\partial x}((xy^2+2y-e^x)\mu)\ \Rightarrow\ \frac{\mu'}{\mu}=\frac{-2e^x-2y^2}{y^3+ye^x}=-\frac{2}{y}.$$

Por tanto basta tomar $\mu=1/y^2$. Buscamos ahora un potencial F de la nueva ecuación $(\frac{e^x}{y}+y)\,dx+(x+\frac{2}{y}-\frac{e^x}{y^2})\,dy=0$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{e^x}{y}+y && \Rightarrow\ F=\frac{e^x}{y}+xy+g(y)\\ &\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{e^x}{y^2}+x+g'=x+\frac{2}{y}-\frac{e^x}{y^2} && \Rightarrow\ g=2\log|y|+c\ \Rightarrow\ F=\frac{e^x}{y}+xy+2\log|y|+c.\end{aligned}$$

Por tanto la solución de la ecuación es $\dfrac{e^x}{y} + xy + 2\log|y| + c = 0$.

Problema 2. (**2 puntos**) Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 2e^{2t}, \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Si escribimos $Y = Y(s)$ por la transformada de Laplace de $y = y(t)$, la ecuación transformada es

$$s^2Y - 1 + 5sY + 6Y = \frac{2}{s-2}.$$

Por tanto

$$Y(s) = \frac{s}{(s-2)(s^2+5s+6)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}.$$

Se calcula $A = 1/10$, $B = 1/2$, $C = -3/5$. La transformada inversa nos da la solución

$$y(t) = \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{3}{5}e^{-3t}.$$

Si resolvemos directamente, vemos que la ecuación característica es $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, que tiene soluciones $\lambda = -2, -3$, luego la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}$. Una solución particular de la ecuación completa es $y_p(t) = Me^{2t}$, que sustituyendo da $M = 1/10$. Los datos iniciales para la solución general $y_g = y_h + y_p$ nos dan $c_1 = 1/2$, $c_2 = -3/5$, por lo que obtenemos la misma solución que antes.

Problema 3. (**2 puntos**) Resolver el problema para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u - 4u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,2\pi) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = 2\,\mathrm{sen}^2\, y \end{cases}$$

Buscando soluciones en variables separadas, $u(x,y) = X(x)Y(y)$, se tiene $X''Y + XY'' - 4XY = 0$, es decir $\dfrac{X''}{X} - 4 = -\dfrac{Y''}{Y} = \lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} X'' - (4+\lambda)X = 0, \quad 0 < x < \pi \\ X'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \quad 0 < y < 2\pi \\ Y'(0) = Y'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

El problema de autovalores es el segundo. Se tiene la sucesión $\lambda_n = n^2/4$, $n \geq 0$, $Y_n(y) = \cos ny/2$. Sustituyendo en el primer problema, se tiene

$$X_n(x) = c_n e^{\sqrt{\frac{n^2}{4}+4}\,x} + d_n e^{-\sqrt{\frac{n^2}{4}+4}\,x}, \qquad n \geq 0.$$

El dato en $x=0$ implica $c_n = d_n$. Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \big(e^{\sqrt{\frac{n^2}{4}+4}\,x} + e^{-\sqrt{\frac{n^2}{4}+4}\,x}\big) \cos\frac{ny}{2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n \cosh\Big(\sqrt{\frac{n^2}{4}+4}\,x\Big) \cos\frac{ny}{2}. \end{aligned}$$

El dato en $x=\pi$, $u(\pi,y) = 2\,\mathrm{sen}^2\, y = 1-\cos 2y$, implica $c_n = 0$ para $n \neq 0, 4$, $c_0 = \dfrac{1}{2\cosh 2\pi}$, $c_4 = \dfrac{-1}{2\cosh\sqrt{8}\,\pi}$. La solución es entonces

$$u(x,y) = \frac{\cosh 2x}{\cosh 2\pi} - \frac{\cosh\sqrt{8}\,x}{\cosh\sqrt{8}\,\pi}\cos 2y.$$

Problema 4. (**2 puntos**) Resolver el problema para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}\, 4x \end{cases}$$

Buscando soluciones en variables separadas, $u(x,t) = X(x)T(t)$, se tiene $T'X = X''T - 6XT$, es decir $\dfrac{T'}{T} + 6 = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad T' + (6+\lambda)T = 0, \quad t > 0.$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, $X_n(x) = \mathrm{sen}\, nx$. Sustituyendo en el segundo problema, se tiene

$$T_n(t) = c_n e^{-(n^2+6)t}, \qquad n \geq 1.$$

Por tanto intentamos una solución en forma de serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \mathrm{sen}\, nx.$$

El dato en $t=0$ implica $c_n = 0$ para $n \neq 4$, $c_4 = 3$. La solución es entonces

$$u(x,t) = 3e^{-22t}\,\mathrm{sen}\, 4x.$$

Problema 5. (**2 puntos**) Resolver el problema para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 2\operatorname{sen} 3x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Buscando soluciones en variables separadas, $u(x,t) = X(x)T(t)$, se tiene $T''X = X''T - 10XT'$, es decir $\dfrac{T''}{T} + 10\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$. Tenemos los problemas

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T'' + 10T' + \lambda T = 0, \quad t > 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

El problema de autovalores es el primero. Se tiene la sucesión $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$. Sustituyendo en el segundo problema, la ecuación caratcterística tiene soluciones $\mu = -5 \pm \sqrt{25 - n^2}$, por lo que la forma de las soluciones de la parte temporal depende del signo de $25 - n^2$; pero mirando al dato inicial, solo el término $n = 3$ va a aparecer, por lo que $T(t) = c_3 e^{-t} + d_3 e^{-9t}$; como $T'(0) = 0$ se tiene $c_3 = -9d_3$. Así

$$u(x,t) = d_3(-9e^{-t} + e^{-9t}) \operatorname{sen} 3x.$$

El dato en $t = 0$ implica $d_3 = -1/4$. La solución es entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{4}(9e^{-t} - e^{-9t}) \operatorname{sen} 3x.$$
