

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 9

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, con $x_1 = 1$. Demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existe y calcula su valor.

Problema 2. Estudia la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + n^{-3}}{n^a}$$

dependiendo del valor del parámetro $a \in \mathbb{N}$.

Problema 3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 6\sqrt{x} - x\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ (x-4)e^{16-x^2} \left[2 - \beta \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{8} x \right) \right] + 4 & \text{si } x > 4, \end{cases}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

- (a) Encuentra el valor de β tal que $f(x)$ es derivable en $x = 4$.
 - (b) Encuentra, si existen, máximo y mínimo *globales* de $f(x)$ en el intervalo $[0, 4]$.
-

Problema 4. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(\sqrt{t}) dt$.

- (a) Usando el polinomio de Maclaurin de grado 2 para $F(x)$, calcula una aproximación del valor

$$\int_0^{0,01} \cos(\sqrt{t}) dt.$$

- (b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - x^2}{x^4}$.
-

Problema 5. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

(a) $\int e^x \cos(2x) dx$

(b) $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 2} dx$

Problema 6. Estudia para que valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ la integral *impropia*

$$\int_0^2 \frac{1}{x^k} (1-x)^{k-1} dx$$

es convergente.
