uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 3

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Encuentra *todos* los valores del parámetro $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^k(x/3)}{k^{1/5}+k^{1/6}}$$

converge.

SOLUCIÓN

Sea $a_k = \dfrac{\operatorname{sen}^k(x/3)}{k^{1/5}+k^{1/6}}$. Entonces, tenemos que

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |\operatorname{sen}(x/3)|\,\frac{k^{1/5}+k^{1/6}}{(k+1)^{1/5}+(k+1)^{1/6}} \quad\longrightarrow\quad |\operatorname{sen}(x/3)| \quad \text{si} \quad k\to\infty\,.$$

Así pues, gracias al *criterio del cociente*, la serie converge si

$$|\operatorname{sen}(x/3)|<1 \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x\in\mathbb{R} \;\; \text{con} \;\; \frac{x}{3}\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\,, \;\; n=0,1,2,\ldots\,.$$

Notése que la serie sería divergente para aquellos valores de x tales que $|\operatorname{sen}(x/3)|>1$, que nunca se cumple. Por otra parte, si

$$\operatorname{sen}(x/3)=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}+j\pi\,, \;\; j=0,2,4,\ldots\,,$$

entonces $a_k = 1/(k^{1/5}+k^{1/6})$. En este caso, considerando $b_k = 1/k^{1/5}$, se obtiene que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = 1 > 0\,,$$

y por el *criterio de comparación al límite* la serie diverge siendo $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergente (ambas series tienen términos positivos). Finalmente, si

$$\operatorname{sen}(x/3) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{3\pi}{2} + j\pi\,, \;\; j = 0, 2, 4, \ldots\,,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/5} + k^{1/6}}\,,$$

que converge gracias al *criterio de Leibniz*. Por tanto, podemos concluir que la serie dada converge para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 3\,(\pi/2 + j\pi)\,,\; j = 0, 2, 4, \ldots$.

Problema 2. Considera la función $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad -1 \le x < 0, \\ x & \text{si} \quad \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

- Demuestra que $f(x)$ es acotada y calcula su imágen.
- Estudia la derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo $(-1,1)$.

SOLUCIÓN

Para demostrar que $f(x)$ es acotada en $[-1,1]$ podemos comprobar que $f(x)$ es continua en dicho intervalo cerrado y acotado. La función es continua en $[-1,0) \cup (0,1]$ siendo composición de funciones continuas. Demostremos su continuidad en $x = 0$. Podemos escribir

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-1/x^2} = 0,$$

por tanto $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Como consecuencia, $f(x)$ es continua y acotada en $[-1,1]$. Además, su imágen es el intervalo $[0,1]$. Finalmente, la función $f(x)$ es derivable para todo $x \in (-1,1)$ con $x \neq 0$, porque

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0.$$

Problema 3.

- Aproxima el valor $\sqrt[7]{6/5}$ usando un polinomio de grado 2.
- Encuentra una cota superior para el error involucrado en la aproximación anterior.

SOLUCIÓN

Notése que

$$\sqrt[7]{\frac{6}{5}} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^{1/7}$$

se puede calcular evaluando la función $f(x) = (1+x)^{1/7}$ en $x = 1/5$. Dicha función puede expresarse gracias al Teorema de Taylor como

$$(1+x)^r = 1 + r\,x + \frac{1}{2}r(r-1)x^2 + R_2(x)\,,$$

con $r = 1/7$. La expresión anterior es la suma de un polinomio de grado 2 y el resto $R_2(x)$ dado por

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}\,x^3\,,$$

donde $f'''(c) = 78/343\,(1+c)^{-20/7}$ y $c \in (0, x)$ cuando $x > 0$. Así pues, podemos aproximar el valor deseado con

$$\sqrt[7]{\frac{6}{5}} \approx 1 + \frac{1}{35} - \frac{3}{49}\frac{1}{25} \approx 1.0261\,.$$

Finalmente, una cota superior para el resto en $x = 1/5$ (esto es el error involucrado) es

$$\left|R_2\left(\frac{1}{5}\right)\right| = \frac{78}{343}\,\frac{1}{(1+c)^{20/7}}\,\frac{(1/5)^3}{3!} < \frac{78}{343}\,\frac{(1/5)^3}{3!} \approx 3 \cdot 10^{-4}\,,$$

donde la desigualdad se cumple porque $c \in (0, 1/5)$, pues $1/(1+c)^{20/7} < 1$.

Problema 4. Calcula
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^7}\int_0^x \operatorname{sen}(3t^2)\,dt\right).$$

SOLUCIÓN

El límite puede expresarse como
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-F(x)}{x^7}\,,\quad \text{con } F(x)=\int_0^x \operatorname{sen}(3t^2)\,dt\,.$$
Usando la regla de l'Hôpital y el Teorema Fundamental del Cálculo, podemos escribir
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3-F(x)}{x^7} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-F'(x)}{7x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\operatorname{sen}(3x^2)}{7x^6}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\left[3x^2-9/2\,x^6+o(x^6)\right]}{7x^6} = \frac{9}{14}\,,\end{aligned}$$
donde, en la penúltima igualdad, hemos sustituido la función $\operatorname{sen}(3x^2)$ con su polinomio de Maclaurin de grado 6.

Problema 5. Calcula la integral definida

$$\int_0^{\ln\sqrt{2}} \sqrt{e^{2t}-1}\,dt\,.$$

SOLUCIÓN

Aplicando el cambio de variable $u = \sqrt{e^{2t}-1}$ $(\,dt = u(u^2+1)^{-1}du\,)$ tenemos que

$$\int_0^{\ln\sqrt{2}} \sqrt{e^{2t}-1}\,dt \;=\; \int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,du \;=\; \int_0^1 \left[1-\frac{1}{u^2+1}\right]\,du$$

$$=\; \Big[u-\arctan(u)\Big]_0^1 \;=\; 1-\frac{\pi}{4}\,.$$

Problema 6. Estudia la convergencia de las integrales impropias

$$I_n(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}\, dx\,, \quad \lambda > 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

SOLUCIÓN

Observa que $I_0(\lambda)$ es convergente. Además, una integración por partes da

$$I_1(\lambda) \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\, e^{-\lambda x}\, dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{\lambda^2} - e^{-\lambda b}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda} \right) \right] \;=\; \frac{1}{\lambda^2}\,,$$

por tanto $I_1(\lambda)$ es convergente también. Ahora, para poder usar el *método de inducción*, supongamos que $I_k(\lambda)$ es convergente para $n = k \in \mathbb{N}$ y demostremos que $I_{k+1}(\lambda)$ es convergente también ($n = k+1$). Tenemos que

$$\begin{aligned} I_{k+1}(\lambda) \;&=\; \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^{k+1} e^{-\lambda x}\, dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{b^{k+1}}{\lambda}\, e^{-\lambda b} + \frac{k+1}{\lambda} \int_0^b x^k e^{-\lambda x}\, dx \right] \\ &=\; \frac{k+1}{\lambda}\, I_k(\lambda)\,, \end{aligned}$$

usando otra vez una integración por partes. Esto significa que $I_{k+1}(\lambda)$ converge porque $I_k(\lambda)$ converge por hipótesis. Finalmente, concluimos que todas las integrales impropias dadas son convergentes para $\lambda > 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).