APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEGUNDO CURSO DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

1. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Ecuaciones de variables separadas. Son ecuaciones que pueden escribirse de la forma $y' = f(x)g(y)$. Se resuelven haciendo la separación de variables $dy/g(y) = f(x)dx$, e integrando los dos lados de la igualdad.

Ecuaciones de la forma $y' = f(ax+by+c)$. Se resuelven haciendo el cambio de variable $z = ax+by+c$, que la reduce a una ecuación de variables separadas en la variable z.

Ecuaciones homogéneas de grado cero. Una función f de dos variables se dice homogénea de grado 0 si $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, para todos $x, y \in \mathbf{R}$ y $\lambda > 0$. Una ecuación se dice homogénea de grado 0 si puede escribirse de la forma $y' = f(x, y)$, con f homogénea de grado 0. Se resuelve haciendo el cambio de variable $z = y/x$, que la reduce a una ecuación de variables separadas en la variable z.

Ecuaciones exactas. Una ecuación de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se denomina exacta si $N_x = M_y$, donde los subíndices denotan derivadas parciales. En tal caso existe una función $f(x, y)$ tal que $f_x = M$ y $f_y = N$, y la solución general de la ecuación es $f(x, y) = c$, donde c es una constante arbitraria.

Método del factor integrante. Una ecuación cualquiera de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ puede multiplicarse por una función arbiraria $\mu(x, y)$, obteniendo la ecuación equivalente $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$. La función μ se denomina factor integrante si esta última ecuación es exacta, es decir, si $(\mu N)_x = (\mu M)_y$. En tal caso podemos resolver esta última ecuación dado que es exacta.

Ecuaciones lineales. Una ecuación se dice lineal si puede escribirse de la forma $y' = a(x)y + b(x)$. Se denomina ecuación homogénea a $y' = a(x)y$; a la primera ecuación se la denomina ecuación completa. Se puede demostrar que la solución general de la ecuación completa puede obtenerse sumando la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación completa; esto suele escribirse $y_{gc} = y_{gh} + y_{pc}$.

La solución general de la ecuación homogénea se halla fácilmente puesto que es una ecuación de variables separadas: $y_{gh} = ce^{\int a(x)dx}$.

Se puede hallar una solución particular de la ecuación completa por el *método de variación de las constantes*: Si buscamos una solución particular de la forma $y_{pc} = c(x)e^{\int a(x)dx}$, al sustituir esta función en la ecuación completa, se llega a una ecuación de variables separadas para $c(x)$.

Ecuación de Bernoulli. Una ecuación se dice de Bernoulli si puede escribirse de la forma $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^n$, con $n \neq 0, 1$. Podemos resolver esta ecuación con el cambio de variable $y = z^{1/(1-n)}$, ya que se obtiene una ecuación lineal para $z(x)$.

Ecuación de Riccati. Una ecuación se dice de Riccati si puede escribirse de la forma $y' = P(x) + Q(x)\,y + R(x)\,y^2$. Si $y_1(x)$ es una solución particular de la ecuación, la solución general puede escribirse como $y(x) = y_1(x) + z(x)$. Esto resuelve la ecuación, ya que en la nueva variable $z(x)$ obtenenmos una ecuación de Bernoulli.