

## **INTRODUCCION AL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: APLICACIÓN A LA MECANICA DE SÓLIDOS**

El Método de los Elementos Finitos es un método numérico de resolución de problemas de Mecánica de Sólidos que resulta de gran importancia por su utilidad práctica. Es una herramienta de cálculo muy potente que permite al ingeniero estructuralista resolver infinidad de problemas. Sin embargo, es un método que no proporciona la solución “exacta” a un problema dado, sino que, en realidad, posibilita obtener una solución aproximada que, con el juicio ingenieril que se le supone al calculista, puede ser más que suficiente para la resolución de un problema práctico.

Su idea básica no puede ser más sencilla: dado un sólido, sometido a un sistema de cargas y coaccionado por unas ligaduras, el método consiste en subdividir el sólido en pequeñas partes (elementos) interconectadas entre sí a través de los nudos de los elementos, de manera que suponemos que, el campo de desplazamientos en el interior de cada elemento, puede expresarse en función de los desplazamientos que sufren los nudos del elemento (desplazamientos nodales); posteriormente, se podrá determinar la matriz de rigidez de cada elemento, las cuales una vez ensambladas (siguiendo los pasos del análisis matricial de estructuras), permitirán la obtención de los desplazamientos en los nudos de cada elemento. De esa manera, una vez conocidos dichos desplazamientos, podríamos determinar, de una forma aproximada como ya se dijo antes, las tensiones y las deformaciones en el interior del elemento.

Veamos con un ejemplo lo dicho anteriormente. Supongamos el problema de la Figura 1, que corresponde a un problema de una placa de dimensiones finitas, sometida a tracción en sus lados superior e inferior, y que posee un agujero circular, de un determinado radio, en su centro.

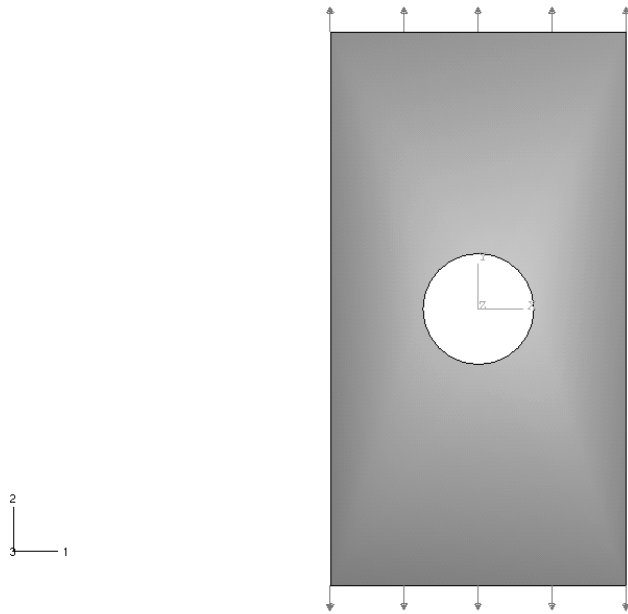


FIGURA 1

Una modelización por elementos finitos de este problema, empleando elementos triangulares por ejemplo, podría ser la representada en la Figura 2, en la que se representa la malla de un modelo que podría utilizarse para la resolución del problema.

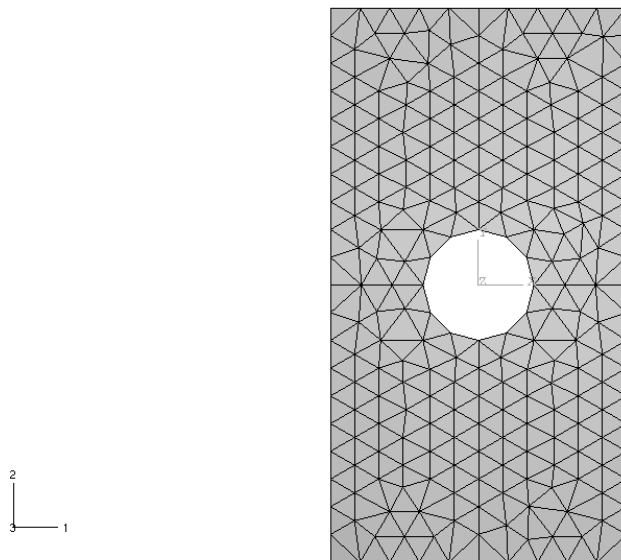


FIGURA 2

Como vemos en dicha figura, la placa ha sido subdividida en elementos triangulares, de forma que estos elementos se suponen interconectados a través de sus vértices. Evidentemente, dado el número de elementos que hemos utilizado, el agujero circular

de la realidad, por ejemplo, ya no es circular en nuestro modelo sino que es un dodecágono.

Las consideraciones hechas conducen a que, irremisiblemente, la solución que vamos a obtener es una aproximación a la solución real del problema de la Figura 1 pero, muchas veces, en la aplicación práctica en ingeniería estructural, esto puede ser más que suficiente. No obstante, podríamos haber “refinado” la malla anterior reduciendo el tamaño de los elementos, y por tanto aumentando el número de ellos, lo que hubiese permitido modelizar mejor la geometría del agujero central de la placa, y así obtener una solución que, aunque siguiera siendo aproximada, resultara más próxima a la realidad.

Todo lo anterior, nos ilustra sobre las posibilidades del método, que no sólo se imita a caso bidimensionales sino que, también, permite analizar problemas tridimensionales: podemos analizar cualquier pieza de cualquier geometría, obteniendo el campo tenso-deformacional en su interior, y así luego poder comprobar que la pieza analizada cumple con los requisitos estructurales que esperábamos de ella.

En general, en un problema a analizar por el Método de los Elementos Finitos, conoceremos las fuerzas exteriores aplicadas en algunos de sus nudos y los valores de los desplazamientos en otros (dependiendo de las ligaduras que posea el sólido). La clave del método está en que, tras su aplicación, obtendremos una expresión del tipo:

$$\{F\} = [K]\{u\} \quad (1)$$

en la que,  $\{F\}$  es un vector columna, conocido como vector de cargas, en el que están todas las fuerzas exteriores (las directamente aplicadas y las reacciones producidas por las ligaduras) que actúan sobre el sólido; en el miembro de la derecha nos encontramos al vector  $\{u\}$ , denominado vector de desplazamientos nodales, que representa, de manera ordenada, todos los desplazamientos que experimentan los nudos del modelo, y la matriz  $[K]$ , que se conoce como matriz de rigidez del sistema estructural y, cuya formación constituye el “corazón” de este método. Al igual que sucedía con la técnica convencional del análisis matricial de estructuras, del vector de cargas conoceremos sus componentes correspondientes a las cargas directamente aplicadas al sólido pero, en general, no conoceremos las cargas de reacción que aparecen como consecuencia de las ligaduras existentes. Del vector de desplazamientos nodales no conoceremos muchas de sus componentes aunque sí algunas que resultan consecuencia directa de las ligaduras que existan.

Lógicamente, si se dispone de la matriz  $[K]$ , el hacer un nuevo análisis del sólido con otro tipo de cargas, por ejemplo, en la hipótesis de que se mantiene su misma geometría y las propiedades del material del que está realizado, es muy sencillo, pues sólo es necesario cambiar los vectores  $\{F\}$  y  $\{u\}$ .

Un paso previo, para comprender este método, es analizar el significado físico de la matriz  $[K]$ , para lo que es conveniente estudiar el comportamiento de una barra, articulada en sus extremos (la barra sólo trabaja a esfuerzos axiales) y del conjunto de un sistema de barras articuladas entre sí (estructura articulada). Veamos cómo proceder.

### **El elemento finito lineal (barra biarticulada): planteamiento en coordenadas cartesianas y obtención de su matriz de rigidez**

En este apartado vamos a obtener la matriz de rigidez, en ejes locales, de una barra biarticulada pero, ahora, utilizando las ideas básicas del Método de los Elementos Finitos. Se trata, más bien, de un ejemplo de cómo se procede en este método porque, en realidad, la matriz de rigidez que vamos buscando ya la hemos obtenido utilizando conceptos de Resistencia de Materiales.

Consideremos el elemento barra de la Figura 10, que se encuentra definido por sus nudos 1 y 2 y que sólo se puede encontrar sometido a la acción de fuerzas en su dirección  $x$  (sería equivalente a identificar la barra con una barra biarticulada) actuando sobre los nudos. Posee una longitud  $L$  y un área de su sección transversal de valor  $A$ . Definamos en él un sistema de referencia cartesiano cuyo eje  $x$  coincide con el de la barra de manera que la coordenadas de sus nudos son  $x_1$  y  $x_2$ .

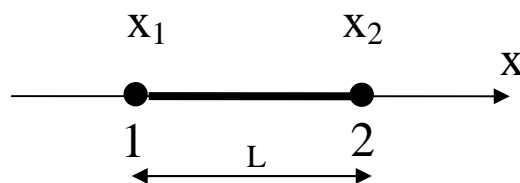


FIGURA 10

Denominemos  $u_1$  y  $u_2$  a los desplazamientos, según el eje  $x$ , que experimentan sus nudos y admitamos que el campo de desplazamientos, en el interior del elemento, lo aproximamos como:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (34)$$

donde las dos constantes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  son desconocidas aunque las podríamos obtener imponiendo que cuando  $x=x_1$ ,  $u(x_1)=u_1$  y que cuando  $x=x_2$ ,  $u(x_2)=u_2$ . Es decir:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 \\ u_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_2 \end{aligned} \quad (35)$$

ó, expresada en forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

La ecuación anterior es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, en este caso.

Su solución proporcionaría:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{x_2 - x_1} \\ \alpha_1 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (37)$$

y, por tanto:

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Conviene hacer una precisión importante para, luego, poder comprobar la importancia del uso de los elementos isoparamétricos que, posteriormente, veremos: para determinar el campo de desplazamientos dentro del elemento (para lo que es necesario determinar los coeficientes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ ) hemos tenido que resolver un sistema de ecuaciones. Esto puede no parecer una cosa importante, sobre todo cuando se está analizando este elemento, pero cuando se desarrollen elementos finitos con muchos más grados de libertad, y teniendo en cuenta que el proceso de resolución para la obtención de los coeficientes de las funciones de forma habría que hacerlo para todos y cada uno de los elementos de la malla, se puede convertir en un esfuerzo de cálculo importante. Esta dificultad la soslayan los elementos finitos isoparamétricos, como ya se verá.

El campo de desplazamientos satisface que, cuando  $x=x_1$ ,  $u(x_1)=u_1$  y que cuando  $x=x_2$ ,  $u(x_2)=u_2$ . El campo de deformaciones dentro del elemento lo podremos obtener a partir del campo de desplazamientos como:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

que, como se observa, es constante a lo largo de todo el elemento. La tensión dentro del mismo se podría obtener a partir de la deformación utilizando la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Supongamos que, sobre los nudos 1 y 2 actúan, respectivamente, la fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  (que sabemos que deben ser iguales y opuestas pero, que para la obtención de la matriz de rigidez, nos conviene considerar dos fuerzas cualesquiera actuando en los nudos) y que suponemos que imponemos a la barra sufre unos desplazamientos virtuales (desplazamientos físicamente posibles aunque no tienen porqué producirse en la realidad), que denotaremos por  $u^\delta(x)$  de manera que  $u^\delta(x_1)=u_1^\delta$ ,  $u^\delta(x_2)=u_2^\delta$ . El campo de desplazamientos en el interior del elemento cumplirá que:

$$u^\delta(x) = \frac{u_2^\delta - u_1^\delta}{L} x + u_1^\delta \quad (41)$$

Este campo de desplazamientos virtuales proporciona el siguiente campo de deformaciones virtuales:

$$\varepsilon^\delta = \frac{\partial u^\delta}{\partial x} = \frac{u_2^\delta - u_1^\delta}{L} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Las tensiones reales (aunque en este caso es una tensión constante) que aparecen en la barra, no cuando se aplican los desplazamientos virtuales sino la que existe en ella como consecuencia de los desplazamientos verdaderos que sufren sus nudos  $u_1$  y  $u_2$  como consecuencia de las fuerzas que actúan sobre la barra, se pueden obtener como:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

El Principio de los Trabajos Virtuales, cuya formulación se estudió en Elasticidad, establece que el trabajo realizado por las cargas reales existentes una vez que sus puntos de aplicación experimentan los desplazamientos virtuales impuestos:

$$F_1 \cdot u_1^\delta + F_2 \cdot u_2^\delta = [F]^T \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \quad (44)$$

tiene que ser igual al trabajo que realizan las tensiones que, verdaderamente, se producen en la barra, cuando ésta experimenta las deformaciones virtuales consecuencia de los desplazamiento virtuales impuestos, y que sería:

$$\int \sigma \cdot \varepsilon^\delta dV = \int_{x=x_1}^{x=x_2} [u_1 \quad u_2] \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \cdot A \cdot dx \quad (45)$$

Nótese que ninguna de las magnitudes del integrando depende de  $x$ , por lo que:

$$\int \sigma \cdot \varepsilon^\delta dV = [u_1 \quad u_2] \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \cdot A \cdot L \quad (46)$$

puesto que:

$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} dx = L \quad (47)$$

Por tanto:

$$\int \sigma \cdot \varepsilon^\delta dV = [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} = [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Igualando el trabajo de las fuerzas exteriores con el realizado por las fuerzas internas, llegamos a que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} = [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Como esta igualdad debe cumplirse independientemente de los desplazamientos virtuales impuestos ( $u_1^\delta$  y  $u_2^\delta$ ), se tendrá que cumplir que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Que podemos expresar, transponiendo los dos miembros de la ecuación, como:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

lo que nos conduce a afirmar que la matriz de rigidez del elemento es:

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

como ya sabíamos.

Cabe preguntarse, para qué hacer así las cosas cuando podríamos haber establecido la matriz de rigidez de una barra biarticulada de forma mucho más directa. La razón es muy simple: hemos seguido todo el procedimiento para formar una matriz de rigidez de un elemento siguiendo la filosofía básica del método de los elementos finitos. Repasemos qué hemos hecho en realidad para obtener la matriz de rigidez de este elemento tan simple:

- 1) Hemos supuesto (en realidad, hemos realizado una aproximación) que el campo de desplazamientos en cualquier punto del elemento tiene la expresión matemática:  $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ , donde los parámetros  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  son desconocidos. Nótese que el tipo de aproximación del campo de desplazamientos tiene dos constantes a determinar:  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  y que el número de grados de libertad de este elemento es también de dos (cada uno de los desplazamientos nodales constituye un grado de libertad).
- 2) Obligando a que, cuando  $x=x_1$ ,  $u(x_1)=u_1$  y cuando  $x=x_2$ ,  $u(x_2)=u_2$  hemos podido, resolviendo un sistema de ecuaciones algebraicas (en este caso de dos ecuaciones con dos incógnitas) obtener los parámetros  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  en función de los desplazamientos que experimentan los nudos de la barra,  $u_1$  y  $u_2$ , y de las coordenadas de los mismos  $x_1$  y  $x_2$ . Si hubiésemos elegido un polinomio con un mayor número de constantes  $\alpha_i$ , y por tanto de un grado superior a la unidad, no podríamos haberlas determinado puesto que sólo podemos imponer las dos condiciones que hemos dicho para su determinación.
- 3) Hemos obtenido las deformaciones dentro de la barra a partir de derivar los desplazamientos en la misma pero como estos, a su vez han sido expresados en función de los desplazamientos de los nudos de la barra, al final del proceso las deformaciones también quedan expresadas en función de dichos desplazamientos nodales mediante la ecuación:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

- 4) Conocidas las deformaciones, hemos obtenido las tensiones en la barra utilizando la ecuación constitutiva del material de la misma (en este caso era la ley de Hooke), y, como las deformaciones dependían de los desplazamientos nodales, las tensión también lo harán. Es decir, hemos considerado que:

$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

- 5) Aplicando el Principio de los trabajos virtuales, hemos conseguido relacionar las fuerzas actuantes en los nudos con los desplazamientos de estos a través de la matriz de rigidez del elemento. En definitiva:



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

## Elemento finito triangular de deformación constante: Matriz de rigidez

Cabría preguntarse si todo lo que hemos visto sobre la matriz de rigidez puede ser aplicado a situaciones más complejas. Si fuéramos capaces de dividir un sólido, considerado éste como un medio continuo, en elementos de manera que lográsemos, para cada uno de ellos, una expresión similar a la de la ecuación (1), podríamos pensar en seguir las mismas pautas que hemos seguido en el problema precedente para resolver problemas de Elasticidad mucho más complicados.

Para ello, supongamos el elemento triangular de la Figura 11, que supondremos que trabaja en tensión plana, y que puede ayudarnos para resolver problemas de sólidos bidimensionales como el que hemos considerado en las Figuras (1) y (2). Vamos a emplear, como sistema de referencia global del elemento el formado por los ejes  $x$ - $y$  de la figura.

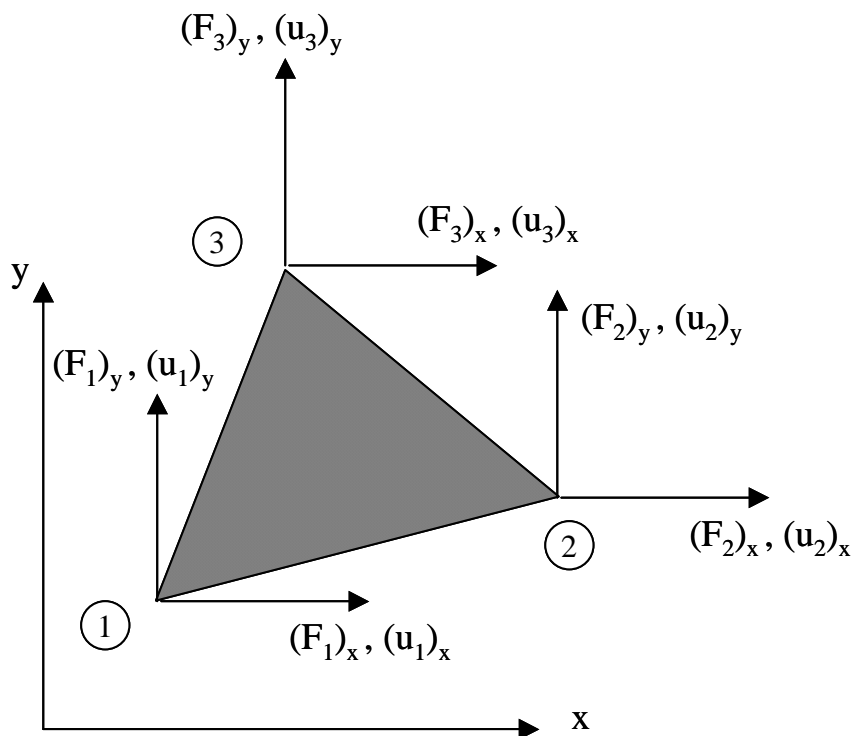


FIGURA 11

Para dicho elemento, hemos dibujado su geometría, numerado sus nudos de acuerdo a un sentido prefijado (antihorario, en este caso) y hemos dibujado las componentes en los ejes cartesianos de las fuerzas y desplazamientos en cada uno de los nudos.

*Vamos a realizar una hipótesis importante: los desplazamientos de los puntos del interior del elemento pueden aproximarse mediante funciones lineales de sus coordenadas.*

Llamando  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  a las componentes del desplazamiento en un punto genérico  $(x,y)$  del elemento según los ejes coordenados, la hipótesis anterior sobre el campo de desplazamientos se traduce en que:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (53)$$

donde ignoramos, por el momento, el valor de los coeficientes  $\alpha_i$  ( $i=1\dots6$ ) que aparecen en la Ecuación (53). Aproximado (porque no es, exactamente, el real) de esta forma el campo de desplazamientos en el interior del elemento (Ecuación (53)), el campo de deformaciones en su interior podría determinarse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_5 + \alpha_3 \end{aligned} \quad (54)$$

Como se observa, el haber supuesto un campo de desplazamientos lineal en  $x$  e  $y$  nos ha conducido a que, el campo de deformaciones en el interior del elemento sea constante e independiente, por tanto del punto concreto del elemento que consideremos. Este elemento finito que estamos describiendo (en el que las funciones de interpolación son polinomios de primer grado en  $x$  y en  $y$ ) recibe el nombre de elemento triangular de deformación constante (Constant Strain Triangle en inglés o, simplemente, elemento CST) ó, también, elemento triangular lineal puesto que las funciones de interpolación de los desplazamientos en el interior del elemento son funciones lineales de las coordenadas del punto que estemos considerando. Utilizando las ecuaciones constitutivas del material puede deducirse el campo tensional en el interior del elemento:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} (\alpha_2 + \nu \alpha_6) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} (\alpha_6 + \nu \alpha_2) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\alpha_5 + \alpha_3)
\end{aligned} \tag{55}$$

que, como se observa, corresponde a un estado de tensión constante dentro del elemento.

Un primer problema que surge es cómo determinar los coeficientes de los polinomios que aparecían en la ecuación (53). Para ello, podemos hacer la siguiente consideración: en los nudos del elemento (es decir, cuando particularicemos las coordenadas  $x$  y  $y$  para los nudos) dichos desplazamientos deben coincidir con los desplazamientos nodales que el elemento va a sufrir. Si las coordenadas de los nudos fueran: del nudo 1,  $(x_1, y_1)$ ; del 2,  $(x_2, y_2)$  y del 3,  $(x_3, y_3)$ , se tendría que:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\
v_1 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \\
u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\
v_2 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \\
u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \\
v_3 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3
\end{aligned} \tag{56}$$

Estas ecuaciones escritas en forma matricial quedarían como:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{57}$$

Llamando:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \overline{u_1} \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} [C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} y \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

la ecuación (58) podría escribirse como:

$$\{u\} = [C]\{\alpha\} \quad (59)$$

El vector  $\{u\}$ , en esta técnica de los Elementos Finitos, recibe el nombre de **vector desplazamientos nodales**.

De la ecuación (59) se pueden deducir los valores de los parámetros buscados:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{u\} \quad (60)$$

donde la matriz  $[C]^{-1}$  sería:

$$[C]^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_1 &= y_2 - y_3 \\ b_2 &= y_3 - y_1 \\ b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2 \\ c_2 &= x_1 - x_3 \\ c_3 &= x_2 - x_1 \\ 2a &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned} \quad (62)$$

Las deformaciones (ecuación (55)) pueden expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Llamando:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

la Ecuación (64) puede escribirse:

$$\{\varepsilon\} = [H]\{\alpha\} \quad (65)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (60), la ecuación (65) quedaría como:

$$\{\varepsilon\} = [H][C]^{-1}\{u\} = [B]\{u\} \quad (66)$$

expresión ésta en la que la matriz  $[B]$  es:

$$[B] = [H][C]^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Por tanto, los términos de la matriz  $[B]$  sólo dependen de las coordenadas de los nudos del elemento.

Las tensiones en el interior del elemento pueden escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \text{Simétrica} & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (68a)$$

si el elemento trabaja en tensión plana y:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} & 0 \\ \text{Simétrica} & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (68b)$$

si lo hiciera en deformación plana.

En todo caso, llamando (considerando que el elemento trabaja en tensión plana):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \text{Simétrica} & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

la ecuación (68a) queda, en forma más compacta, como:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (70)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (66), la ecuación (70) puede escribirse como:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\} \quad (71)$$

En esta última ecuación, es conveniente emplear la siguiente nomenclatura y tener en cuenta las consideraciones que se hacen:

$\{\sigma\}$  se denomina **vector tensión en el elemento**,

$\{u\}$  se denomina **vector desplazamientos nodales**,

$[D]$  es una matriz que depende de las propiedades elásticas del material y de si trabaja en condiciones de tensión o deformación planas, y, finalmente,

$[B]$  es una matriz cuyos elementos dependen de las coordenadas cartesianas de los nudos del elemento.

Veamos, ahora, cómo podemos obtener lo que pretendíamos en un principio: la matriz de rigidez del elemento.

Para ello, vamos a suponer que, sobre los nudos del elemento actúan las fuerzas  $((F_1)_x, (F_1)_y, (F_2)_x, etc.)$  que aparecen en la Figura 11. Estas fuerzas serían las que, realmente, actúan en los nudos del elemento. Supongamos que, a los nudos del elemento de la Figura 11, les damos unos desplazamientos virtuales (desplazamientos físicamente posibles y compatibles con las ligaduras pero que no, necesariamente, coinciden con los reales que van a experimentar los nudos) tales como los representados

en la Figura 12 (para diferenciar estos desplazamientos virtuales de los reales hemos escrito los primeros con un superíndice  $\delta$ ).

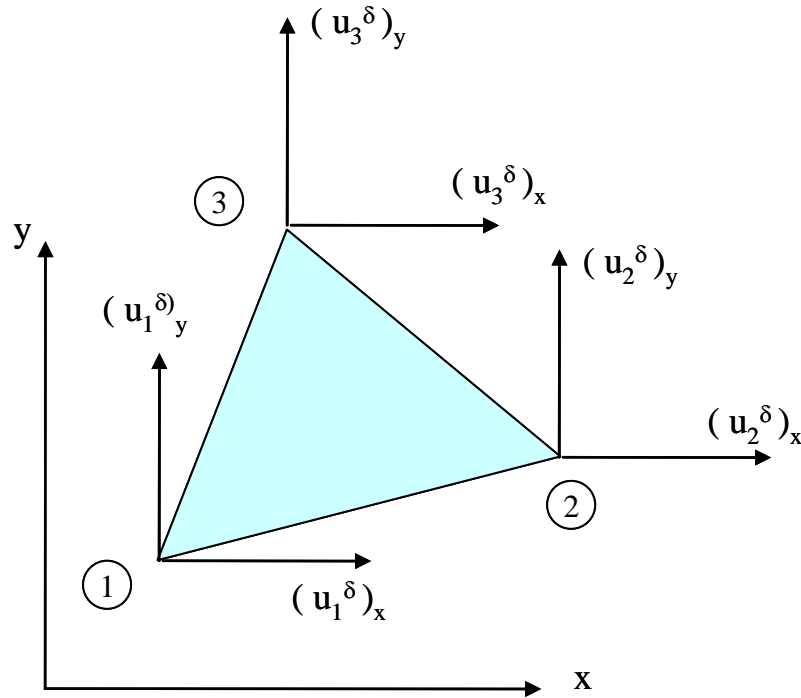


FIGURA 12

El vector desplazamientos nodales virtual,  $\{u^\delta\}$ , será:

$$\{u^\delta\} = \begin{Bmatrix} (u_1^\delta)_x \\ (u_1^\delta)_y \\ (u_2^\delta)_x \\ (u_2^\delta)_y \\ (u_3^\delta)_x \\ (u_3^\delta)_y \end{Bmatrix} \quad (72)$$

Aplicando el **Principio de los Trabajos Virtuales**, podemos establecer que, para unos desplazamientos virtuales de los nudos del elemento,  $\{u^\delta\}$ , el trabajo realizado por las fuerzas reales que actúan en los nudos del elemento,  $\{F\}$ , debe ser igual al trabajo realizado por las tensiones internas  $\{\sigma\}$  reales que actúan dentro del elemento teniendo en cuenta el campo de deformaciones virtuales  $\{\epsilon^\delta\}$  que aparecería en el interior del elemento.



Es decir, si:

$$\{F\}^T \{u^\delta\} = \text{Trabajo de las fuerzas nodales} \quad (73)$$

podemos escribir entonces que:

$$\{F\}^T \{u^\delta\} = \int_{\text{Volumen}} \{\sigma\}^T \{\epsilon^\delta\} dVol \quad (74)$$

donde:

$$\{\epsilon^\delta\} = [B] \{u^\delta\} \quad (75)$$

representa el campo de deformaciones (virtuales) inducido por los desplazamientos, también virtuales,  $\{u^\delta\}$ , el vector  $\{\sigma\}$  representa el vector tensión real que se produce en el elemento como consecuencia de las fuerzas  $\{F\}$  (ver Ecuación (71)).

Por tanto:

$$\{F\}^T \{u^\delta\} = \int_{\text{Volumen}} (\{u\}^T [B]^T [D]^T) \cdot ([B] \{u^\delta\}) dVol = \int_{\text{Volumen}} \{u\}^T [B]^T [D]^T [B] \{u^\delta\} dVol \quad \dots\dots\dots (76)$$

Esta última ecuación debe cumplirse para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales que se impongan sobre el elemento, por lo que se tendrá que verificar que:

$$\{F\}^T = \{u\}^T \left( \int_{\text{Volumen}} [B]^T [D]^T [B] dVol \right) \quad (77)$$

Trasponiendo la ecuación (77) llegamos a que:

$$\{F\} = \left( \int_{\text{Volumen}} [B]^T [D] [B] dVol \right) \{u\} \quad (78)$$

Como, en este caso, los elementos de las matrices  $[B]$  y  $[D]$  son constantes, la Ecuación (78) puede escribirse como:

$$\{F\} = ([B]^T [D] [B] \text{Volumen}) \{u\} \quad (79)$$

donde el “Volumen” se refiere al volumen del elemento, y, por tanto, la matriz de rigidez,  $[K^e]$ , buscada es:

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] \text{Volumen} \quad (80)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las matrices  $[B]$  y  $[D]$  dadas por las expresiones (67) y (68), respectivamente, la matriz de rigidez del elemento,  $[K^e]$ , resulta ser:

$$[K^e] = \frac{e}{4a} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & sim. & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad (81)$$

donde:

$$k_{11} = d_{11}b_1^2 + d_{33}c_1^2$$

$$k_{22} = d_{22}c_1^2 + d_{33}b_1^2$$

$$k_{33} = d_{11}b_2^2 + d_{33}c_2^2$$

$$k_{44} = d_{22}c_2^2 + d_{33}b_2^2$$

$$k_{55} = d_{11}b_3^2 + d_{33}c_3^2$$

$$k_{66} = d_{22}c_3^2 + d_{33}b_3^2$$

$$k_{12} = (d_{12} + d_{33})b_1c_1$$

$$k_{13} = d_{11}b_1b_2 + d_{33}c_1c_2$$

$$k_{14} = d_{12}b_1c_2 + d_{33}c_1b_2$$

$$k_{15} = d_{11}b_1b_3 + d_{33}c_1c_3$$

$$k_{16} = d_{12}b_1c_3 + d_{33}c_1b_3$$

$$k_{23} = d_{12}b_2c_1 + d_{33}b_1c_2$$

$$k_{24} = d_{22}c_1c_2 + d_{33}b_1b_2$$

$$k_{25} = d_{12}b_3c_1 + d_{33}b_1c_3$$

$$k_{26} = d_{22}c_1c_3 + d_{33}b_1b_3$$

$$k_{34} = (d_{12} + d_{33})b_2c_2$$

$$k_{35} = d_{11}b_2b_3 + d_{33}c_1c_3$$

$$k_{36} = d_{12}b_2c_3 + d_{33}b_3c_2$$

$$k_{45} = d_{21}b_3c_2 + d_{33}b_2c_3$$

$$k_{46} = d_{22}c_2c_3 + d_{33}b_3b_2$$

$$k_{56} = (d_{21} + d_{33})b_3c_3$$

siendo  $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$  y  $e$  el espesor del elemento.

Veamos, ahora, cómo analizar un problema concreto de Elasticidad utilizando los conocimientos que hemos alcanzado. Supongamos el problema, en tensión plana, de la Figura 13:

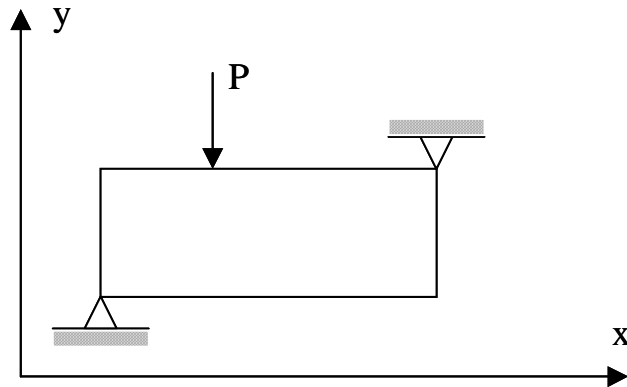


FIGURA 13

que corresponde a una placa rectangular, de la que supondremos conocidas todas sus dimensiones y las propiedades elásticas del material que la forma, que se encuentra sometida a la acción de la carga **P** y simplemente apoyada en dos de sus esquinas.

Lo primero que haríamos es **modelizar** el sólido en base a elementos finitos triangulares (que son los que hemos estudiado), numerando los nudos y los elementos. La **mall**a de elementos finitos resultante podría ser (Figura 14):

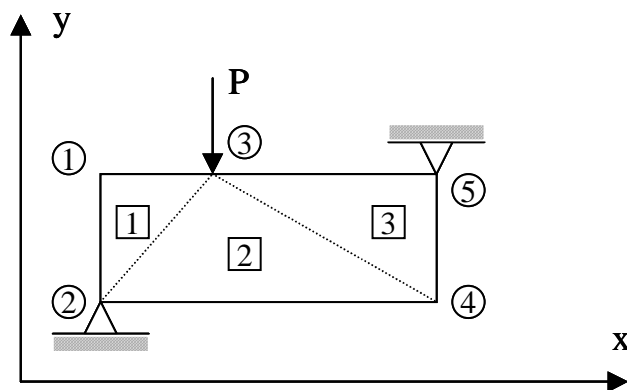


FIGURA 14

La malla que hemos realizado (hemos numerado, consecutivamente, sus nudos y elementos, comenzando ambos desde el 1) es muy simple y, desde luego, podríamos haber realizado otra malla con muchos más nudos y elementos. Pero para lo que ahora

nos interesa (clarificar la metodología del análisis por elementos finitos) nos es suficiente.

Lógicamente, hemos situado un nudo (en concreto el nudo 3) en el punto de aplicación de la carga exterior y otros dos nudos (el 2 y 5) en puntos dónde van a aparecer las fuerzas de reacción, así como los nudos 1 y 4 en las esquinas libres de la placa.

Nuestra malla de elementos finitos consta, pues, de 5 nudos y 3 elementos triangulares. Por tanto, el elemento 1 queda definido por los nudos 1, 2 y 3; el elemento 2, por los nudos 2, 4 y 3 (recuérdese que hay que nombrar los nudos de los elementos siguiendo un sentido antihorario en el recorrido de los mismos); y el elemento 3, por los nudos 3, 4 y 5.

Convendría hacer una precisión de importancia a la hora de definir los elementos. Si nosotros definimos, por ejemplo, el elemento 2 dando la secuencia de sus nudos de la forma 2, 4 y 3, implícitamente estamos dando al nudo 2 (global) el tratamiento del nudo 1 (local) de la Figura 11 y, por tanto, al nudo 4 de la malla global el tratamiento del nudo 2 de dicha figura y, finalmente, al nudo 3 el tratamiento del nudo 3 de la Figura 11. Si, por ejemplo, hubiésemos definido este elemento de la forma, 4,3,2 (lo cual sería perfectamente posible y que sigue manteniendo el criterio de numeración de los nudos en sentido antihorario), al analizar el elemento 2 (de cara a la obtención de la matriz de rigidez) deberíamos considerar que el nudo 4 de la realidad corresponde al nudo 1 (local) de la Figura 11, y el 3 y 2 a los 2 y 3, respectivamente, de dicha figura.

El segundo paso consiste en calcular las matrices de rigidez de cada elemento, de acuerdo a la expresión (63) y atendiendo a lo representado en la Figura 15 (en la que puede observarse las fuerza que actúan sobre cada nudo de cada elemento y las fuerzas que actúan sobre cada nudo en concreto considerando las exteriores y las que ejercerían los elementos que confluyen en ese nudo).

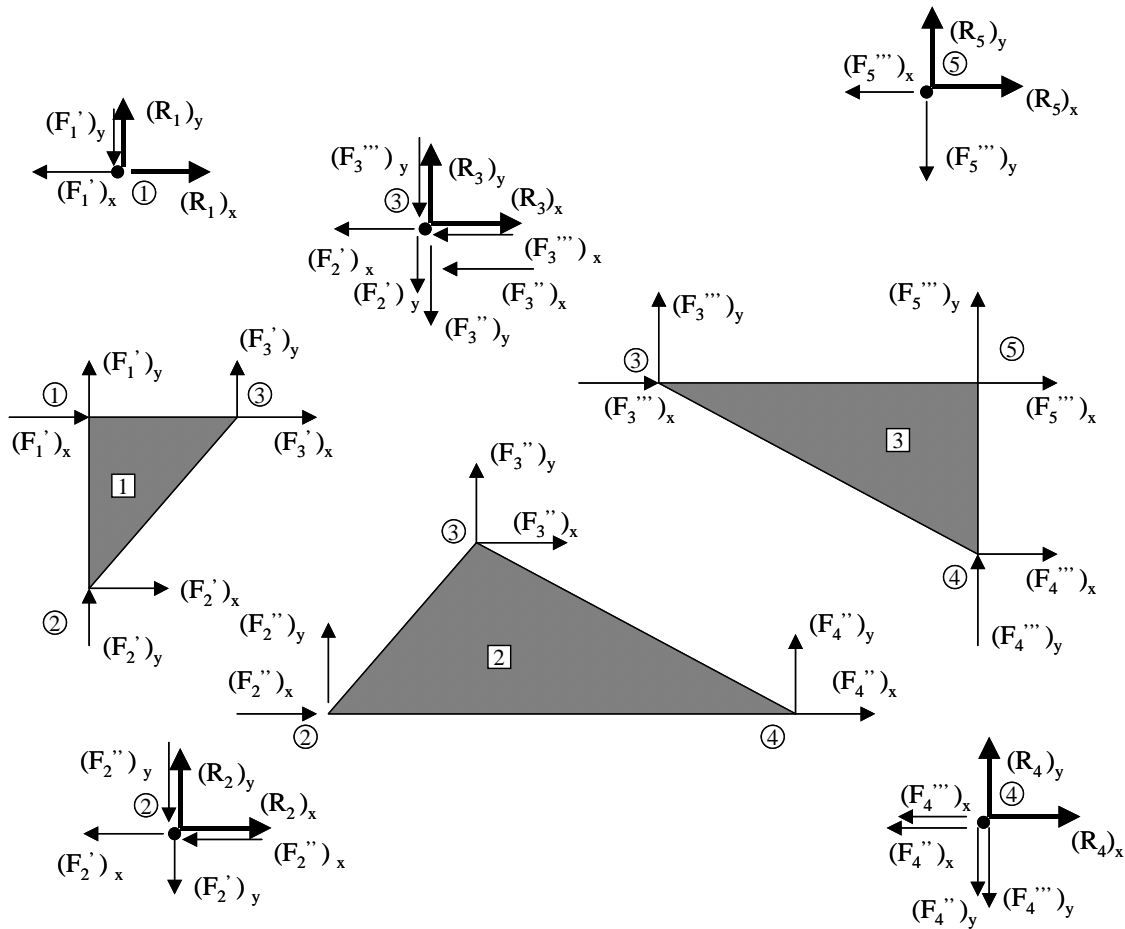


FIGURA 15

Así, por ejemplo, para el elemento 1, tendríamos:

$$[K^e]^{elemento 1} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 \\ & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 \\ & & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 \\ & & & k_{44}^1 & k_{45}^1 & k_{46}^1 \\ sim. & & & & k_{55}^1 & k_{56}^1 \\ & & & & & k_{66}^1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

donde ya hemos incluido el factor  $\frac{e}{4a^1}$  en todos los elemento de la matriz de rigidez (el

superíndice 1 se refiere, lógicamente, al elemento 1).

Si hubiéramos numerado los nudos de este elemento de la forma:1,2,3, podríamos escribir:

$$\{F^1\} = [K^e]^{elemento 1} \{u^1\} \quad (82)$$

donde:

$$\{F^1\} = \begin{Bmatrix} \left( F_1' \right)_x \\ \left( F_1' \right)_y \\ \left( F_2' \right)_x \\ \left( F_2' \right)_y \\ \left( F_3' \right)_x \\ \left( F_3' \right)_y \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \{u^1\} = \begin{Bmatrix} \left( u_1 \right)_x \\ \left( u_1 \right)_y \\ \left( u_2 \right)_x \\ \left( u_2 \right)_y \\ \left( u_3 \right)_x \\ \left( u_3 \right)_y \end{Bmatrix} \quad (83)$$

De igual manera (y afectando del factor  $\frac{e}{4a^2}$  a los elementos de la matriz de rigidez) podríamos haber hecho el mismo tratamiento para el elemento 2 (supuesto que en éste hemos numerado sus nudos como 2,4,3) que hicimos para el elemento 1. Así, habríamos llegado a que:

$$\{F^2\} = [K^e]^{elemento\ 2} \{u^2\} \quad (84)$$

donde:

$$\{F^2\} = \begin{Bmatrix} \left( F_2'' \right)_x \\ \left( F_2'' \right)_y \\ \left( F_4'' \right)_x \\ \left( F_4'' \right)_y \\ \left( F_3'' \right)_x \\ \left( F_3'' \right)_y \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \{u^2\} = \begin{Bmatrix} \left( u_2 \right)_x \\ \left( u_2 \right)_y \\ \left( u_4 \right)_x \\ \left( u_4 \right)_y \\ \left( u_3 \right)_x \\ \left( u_3 \right)_y \end{Bmatrix} \quad (85)$$

y, finalmente, para el elemento 3 (incluyendo el término  $\frac{e}{4a^3}$  dentro de la matriz y numerados sus nudos como 3,4,5), obtendríamos:

$$\{F^3\} = [K^e]^{elemento\ 3} \{u^3\} \quad (86)$$

siendo:



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (F_2'')_x \\ (F_2'')_y \\ (F_3'')_x \\ (F_3'')_y \\ (F_4'')_x \\ (F_4'')_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{55}^2 & k_{56}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & k_{66}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & k_{33}^2 & k_{34}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k_{44}^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (u_2)_x \\ (u_2)_y \\ (u_3)_x \\ (u_3)_y \\ (u_4)_x \\ (u_4)_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (89)$$

Para el elemento 3:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (F_3''')_x \\ (F_3''')_y \\ (F_4''')_x \\ (F_4''')_y \\ (F_5''')_x \\ (F_5''')_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 & k_{15}^3 & k_{16}^3 \\ & & & & & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{25}^3 & k_{26}^3 \\ & & & & & & k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 \\ & & & & & & & k_{44}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 \\ & & & & & & & & k_{55}^3 & k_{56}^3 \\ & & & & & & & & & k_{66}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (u_3)_x \\ (u_3)_y \\ (u_4)_x \\ (u_4)_y \\ (u_5)_x \\ (u_5)_y \end{Bmatrix} \quad (90)$$

Por tanto, la matriz de rigidez global de la estructura  $[K]$  sería (sumando las ecuaciones

(88), (89) y (90)):

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33}^1+k_{11}^2 & k_{34}^1+k_{12}^2 & k_{35}^1+k_{15}^2 & k_{36}^1+k_{16}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & 0 & 0 \\ & & & k_{44}^1+k_{22}^2 & k_{45}^1+k_{25}^2 & k_{46}^1+k_{26}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 \\ & & & & k_{55}^1+k_{55}^2+k_{11}^3 & k_{56}^1+k_{56}^2+k_{12}^3 & k_{53}^2+k_{13}^3 & k_{54}^2+k_{14}^3 & k_{15}^3 & k_{16}^3 \\ & & & & & k_{66}^1+k_{66}^2+k_{22}^3 & k_{63}^2+k_{23}^3 & k_{64}^2+k_{24}^3 & k_{25}^3 & k_{26}^3 \\ & & & & & & k_{33}^2+k_{33}^3 & k_{34}^2+k_{34}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 \\ & & & & & & & k_{44}^2+k_{44}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 \\ & & & & & & & & k_{55}^3 & k_{56}^3 \\ & & & & & & & & & k_{66}^3 \end{bmatrix} \quad (91)$$

y se cumpliría que:

$$\{R\} = [K]\{u\} \quad (92)$$



donde:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} (R_1)_x \\ (R_1)_y \\ (R_2)_x \\ (R_2)_y \\ (R_3)_x \\ (R_3)_y \\ (R_4)_x \\ (R_4)_y \\ (R_5)_x \\ (R_5)_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (F_1')_x \\ (F_1')_y \\ (F_2')_x + (F_2'')_x \\ (F_2')_y + (F_2'')_y \\ (F_3')_x + (F_3'')_x + (F_3''')_x \\ (F_3')_y + (F_3'')_y + (F_3''')_y \\ (F_4'')_x + (F_4''')_x \\ (F_4'')_y + (F_4''')_y \\ (F_5''')_x \\ (F_5''')_y \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} (u_1)_x \\ (u_1)_y \\ (u_2)_x \\ (u_2)_y \\ (u_3)_x \\ (u_3)_y \\ (u_4)_x \\ (u_4)_y \\ (u_5)_x \\ (u_5)_y \end{Bmatrix} \quad (93)$$

Por tanto, hemos llegado a un sistema de 10 ecuaciones. Veamos cuántas incógnitas tenemos en nuestro problema de la Figura 14. Por una parte, en lo relativo a fuerzas directamente aplicadas y reacciones, sabemos que:

$$(R_1)_x = (R_1)_y = (R_3)_x = (R_4)_x = (R_4)_y = 0 \quad \text{y} \quad (R_3)_y = -P$$

ya que los nudos 1 y 4 se encuentran libres de cargas exteriores y, en el nudo 3 existe una carga aplicada vertical (negativa porque su sentido es el contrario al del eje y) y que, por tanto, no tiene componente horizontal.

El vector de fuerzas que resulta será:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (R_2)_x \\ (R_2)_y \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ (R_5)_x \\ (R_5)_y \end{Bmatrix} \quad (94)$$

que proporciona cuatro incógnitas  $((R_2)_x, (R_2)_y, (R_5)_x, (R_5)_y)$  que representan las reacciones existentes en los nudos 2 y 5 de nuestra malla.

Por otra parte, también sabemos que los nudos 2 y 5 no sufrirán desplazamientos (los apoyos existentes lo impiden), por lo que:

$$(u_2)_x = (u_2)_y = (u_5)_x = (u_5)_y = 0$$

y el vector desplazamientos será:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} (u_1)_x \\ (u_1)_y \\ 0 \\ 0 \\ (u_3)_x \\ (u_3)_y \\ (u_4)_x \\ (u_4)_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (95)$$

que proporciona 6 incógnitas:  $(u_1)_x, (u_1)_y, (u_3)_x, (u_3)_y, (u_4)_x, (u_4)_y$  adicionales a las 4 provenientes del vector de fuerzas.

Como el sistema

$$\{R\} = [K]\{u\} \quad (96)$$

proporciona 10 ecuaciones y tenemos 10 incógnitas, la resolución del sistema de ecuaciones proporcionará las 10 incógnitas de nuestro problema.

### **Planteamiento y formulación genéricos del Método de los elementos finitos**

Aunque las ecuaciones que vamos a deducir son totalmente genéricas para cualquier tipo de elemento, y con objeto de facilitar la comprensión de las mismas, plantearemos las ecuaciones del Método de los Elemento Finitos de una forma general, particularizando para el elemento triangular que hemos estudiado en el apartado anterior. Así, consideremos el elemento triangular de la Figura 16, en el que sus nudos vienen definidos por los números  $i, j, k$ .

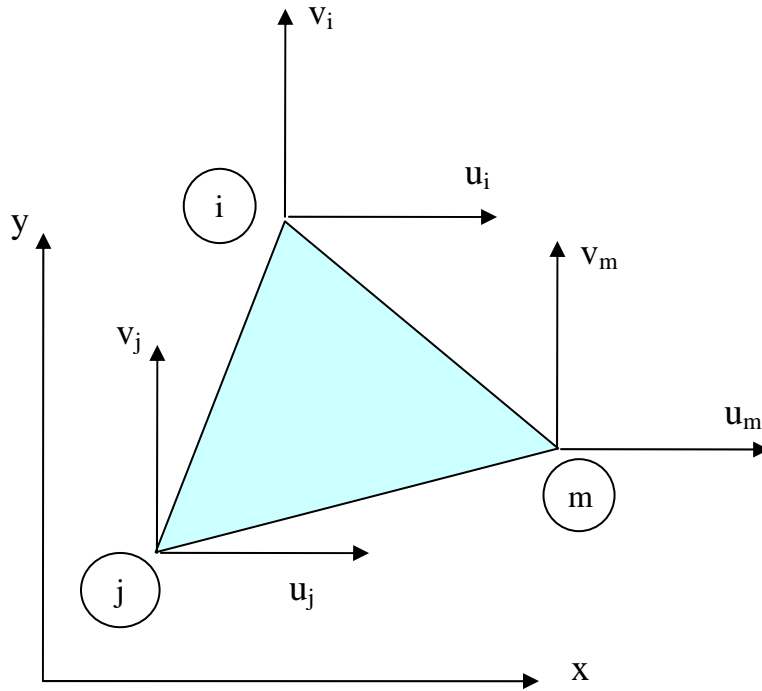


FIGURA 16

Ahora hemos representado los desplazamientos en los nudos por la letra “u”, cuando se refieren a desplazamientos según el eje  $x$ , y por “v” cuando corresponden según el eje  $y$ . El vector que agrupa los desplazamientos nodales lo vamos a representar por  $\{a\}^e$ , donde el superíndice “e” se refiere al elemento en cuestión que consideremos. En el caso del elemento triangular, tendríamos:

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (97)$$

Nótese que, este vector lo podríamos haber obtenido poniendo consecutivamente, en forma de vector columna, los vectores:

$$\{a\}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (98)$$

suponiendo que el subíndice “k” toma los valores “i,j,m”.

El vector  $\{u\}$  que proporciona el campo de desplazamientos en el interior del elemento es:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (99)$$

La idea clave del Método, consiste en suponer que el vector  $\{u\}$  puede escribirse a partir del vector  $\{a\}^e$ ; es decir, que los desplazamientos de cualquier punto del interior del elemento dependen, sólo y exclusivamente, de los desplazamientos de los nudos de dicho elemento.

Por tanto, podremos escribir:

$$\{u\} = \left[ [N_i(x, y)], [N_j(x, y)], [N_m(x, y)] \right] \{a\}^e \quad (100)$$

Este conjunto de matrices ( $[N_i(x, y)], [N_j(x, y)], [N_m(x, y)]$ ), que deben, para el caso del elemento triangular, cuadradas de orden 2, son las funciones de interpolación para determinar el campo de desplazamientos en el interior del elemento, y se conocen como **funciones de forma del elemento**, y deben cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned} [N_k(x_k, y_k)] &= [I] \quad \text{para } k = i, j, m \\ [N_k(x_n, y_n)] &= [0] \quad \text{si } n \neq k \end{aligned} \quad (101)$$

donde  $[I]$  es la matriz unidad. Aunque puede parecer complicado estos nuevos desarrollos respecto de lo que hicimos con anterioridad, vamos a ver que el proceso es bastante más sencillo de lo que parece y, para ello, vamos a analizar un ejemplo.

Para el caso del elemento triangular, vimos que, el campo de desplazamientos en el interior del elemento lo aproximábamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (102)$$

Nótese que, en la ecuación anterior, tenemos seis coeficientes por determinar ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ ) y que disponemos de seis ecuaciones, las cuales se plantearán igualando, para las coordenadas  $x$  e  $y$  de cada nudo, los desplazamientos deducidos de la Ecuación (102) a los desplazamientos en los nudos correspondientes.

Particularizando la ecuación (102) para los tres nudos del elemento, podríamos escribir que:

$$\begin{aligned}
u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\
u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\
u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \\
v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\
v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\
v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m
\end{aligned}
\tag{103}$$

Partiendo de las tres primeras ecuaciones, podríamos obtener los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  en función de  $u_i, u_j, u_m$ , y los parámetros  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  en función de  $v_i, v_j, v_m$ , resultando que la ecuación (99) quedaría de la forma:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} \left( (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \right) \\
v(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} \left( (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m \right)
\end{aligned}
\tag{104}$$

donde:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \times \text{Area del triángulo } (i, j, m)
\tag{105}$$

y

$$\begin{aligned}
a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\
b_i &= y_j - y_m \\
c_i &= x_m - x_j
\end{aligned}
\tag{106}$$

y, por permutación cíclica, podrían obtenerse el resto de coeficientes.

Por tanto, las expresiones de las funciones de forma, serían:

$$\begin{aligned}
N_i(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\
N_j(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\
N_m(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m x + c_m y)
\end{aligned}
\tag{107}$$

con los coeficientes  $a_i, b_i, c_i, a_j, b_j, c_j, a_m, b_m, c_m$  obtenidos de la ecuación (106).

Volviendo a la ecuación (100), ésta quedaría como:

$$\begin{aligned}
\{u\} &= \left[ [N_i(x, y)], [N_j(x, y)], [N_m(x, y)] \right] \{a\}^e = \\
&= \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 & N_j(x, y) & 0 & N_m(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) & 0 & N_j(x, y) & 0 & N_m(x, y) \end{bmatrix} \{a\}^e = \\
&= [N_i(x, y)[I], N_j(x, y)[I], N_m(x, y)[I]] \{a\}^e = [N] \{a\}^e
\end{aligned}$$

..... (108)

La matriz  $[N]$ , de orden  $2 \times 6$  para un elemento triangular, recibe el nombre de **matriz de forma del elemento**.

Las deformaciones inducidas en el interior del elemento pueden expresarse, de una manera más general, como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [L] \{u\} \quad (109)$$

donde la matriz  $[L]$  es, en realidad, una matriz operador. Utilizando la ecuación (91), la ecuación (100) puede escribirse como:

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} = [L][N] \{a\}^e = [B] \{a\}^e \quad (110)$$

donde la matriz  $[B]$  es de  $3 \times 6$ , y puede expresarse, en forma de submatrices, como sigue:

$$[B] = \left[ [B_i], [B_j], [B_m] \right] \quad (111)$$

siendo:

$$[B_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial y} & \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad (112)$$

tomando el subíndice “k” los valores “i,j,m”. Por tanto, la matriz  $[B]$ , para el elemento triangular que estamos considerando, sería:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (113)$$

Las tensiones en el interior del elemento se podrían obtener a partir de las deformaciones utilizando las ecuaciones constitutivas (68a ó 68b), según se trate de un problema en tensión o deformación planas, resultando:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{a\}^e \quad (114)$$

La aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales nos llevaría a que la matriz de rigidez del elemento,  $[K]^e$ , puede expresarse como:

$$[K^e] = \int_{\text{Volumen}} [B]^T [D] [B] dVol \quad (115)$$

que, en el caso del elemento triangular en tensión plana que estamos considerando, conduce a que:

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] e \cdot Area \quad (116)$$

Por tanto, si el vector  $\{F\}^e$  representa las fuerzas nodales que actúan sobre el elemento, se tendría que:

$$\{F\}^e = [K^e]\{a\}^e \quad (117)$$