

CONCEPTOS GENERALES DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Prof. Carlos Navarro

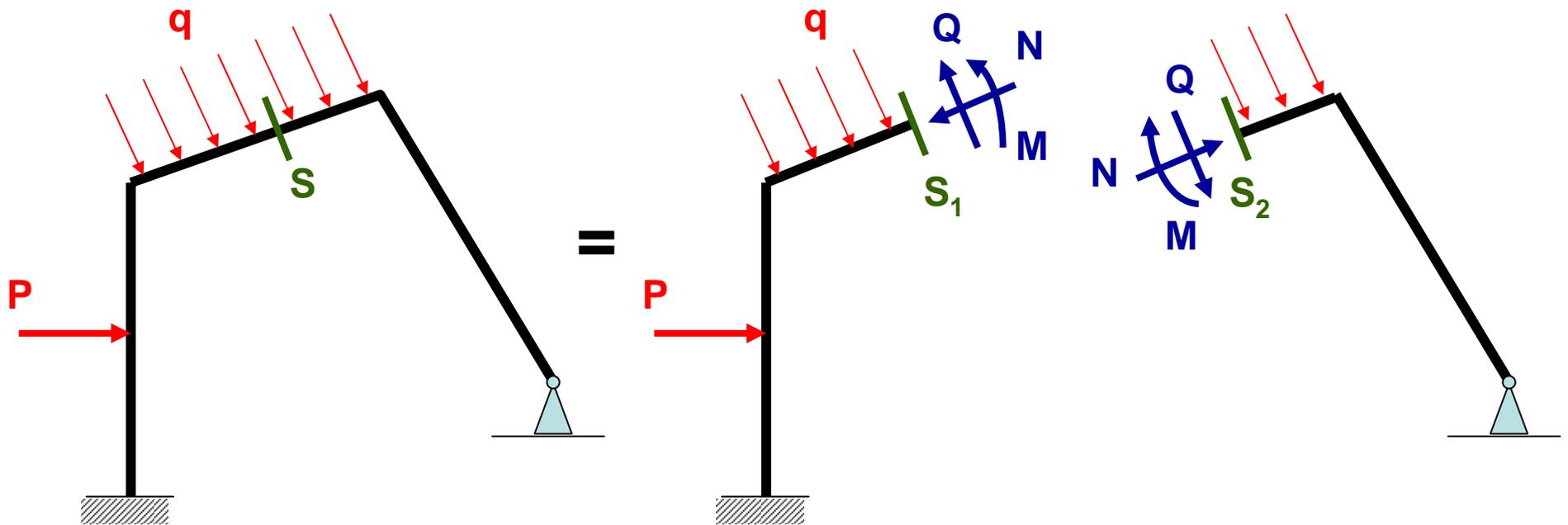
Departamento de Mecánica de Medios Continuos
y Teoría de Estructuras

LAS CONDICIONES DE SUSTENTACIÓN DE UNA ESTRUCTURA

LIBERACIÓN DE ESFUERZOS Y DE REACCIONES

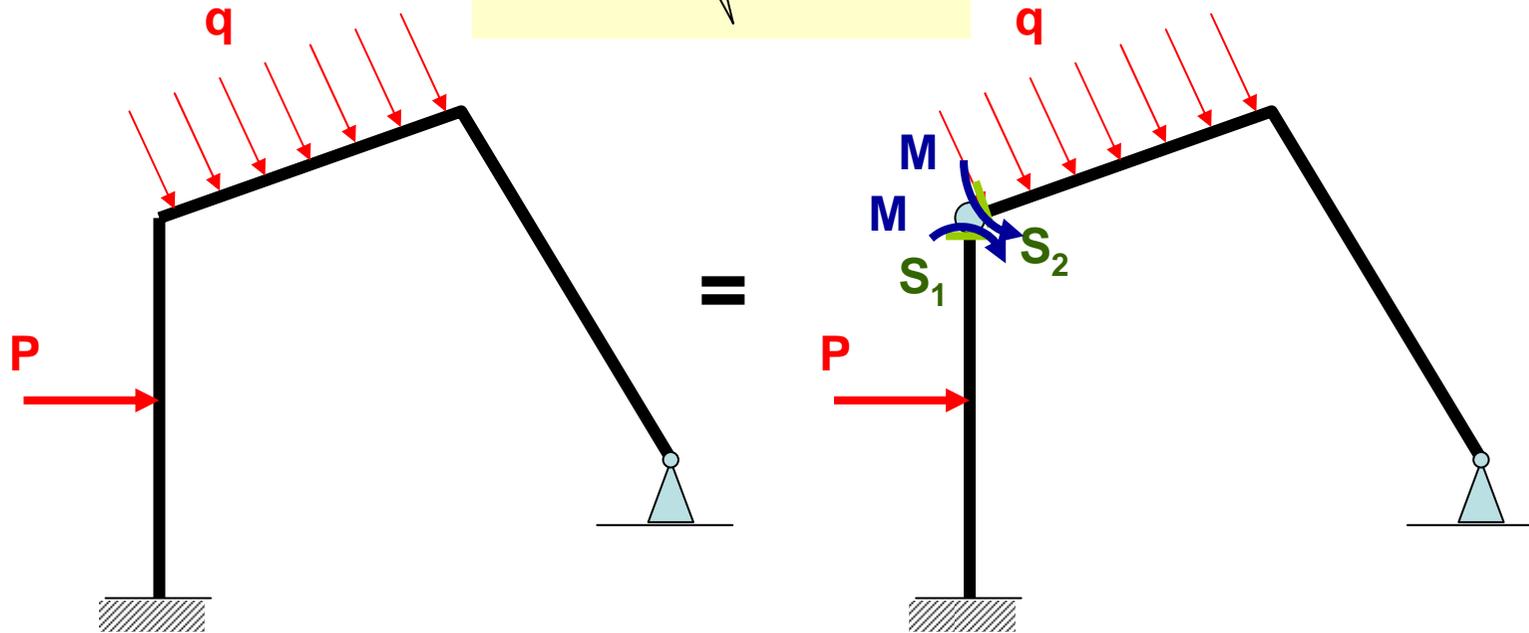
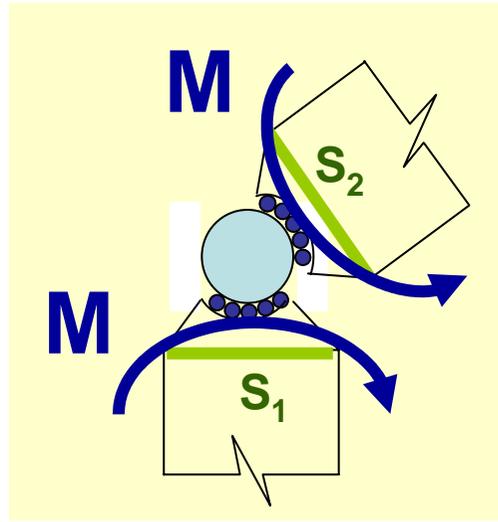
DOS CONCEPTOS BÁSICOS EN EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS:

1.- Liberación de esfuerzos



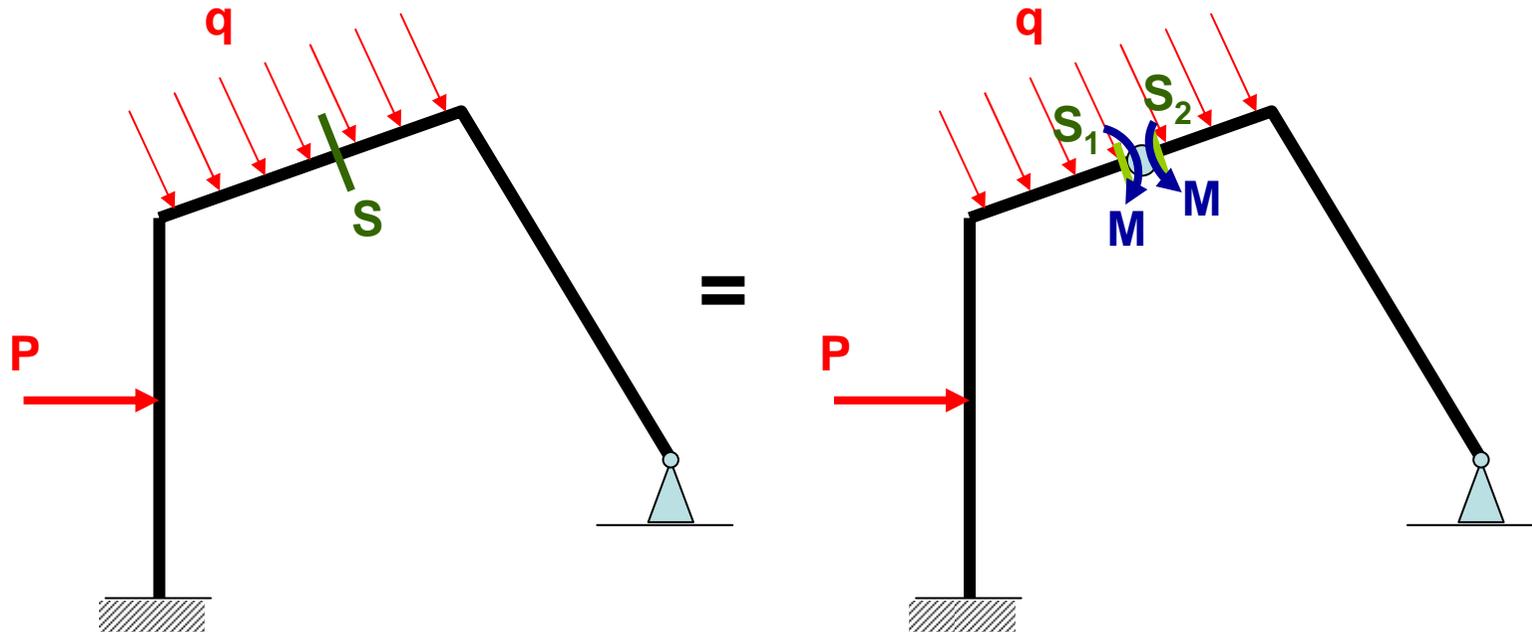
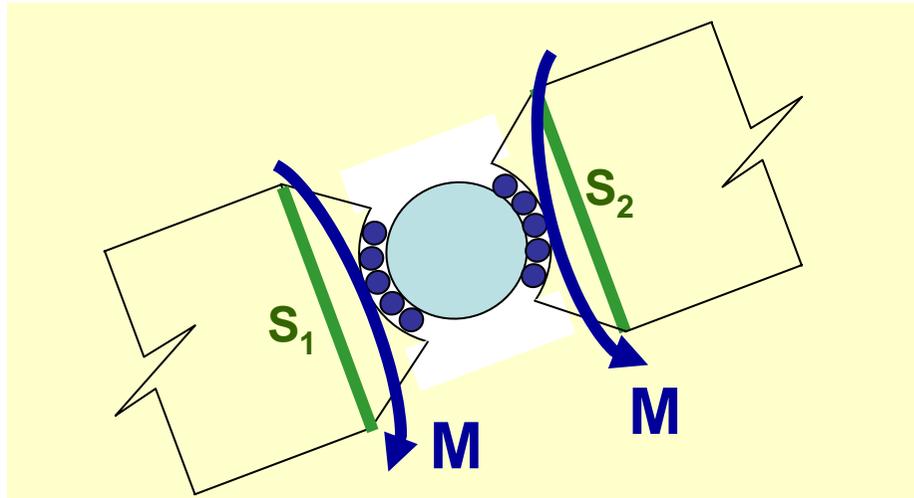
+ {
Desplazamientos horizontales de S_1 y S_2 iguales
Desplazamientos verticales de S_1 y S_2 iguales
Giros de S_1 y S_2 iguales

Momento flector



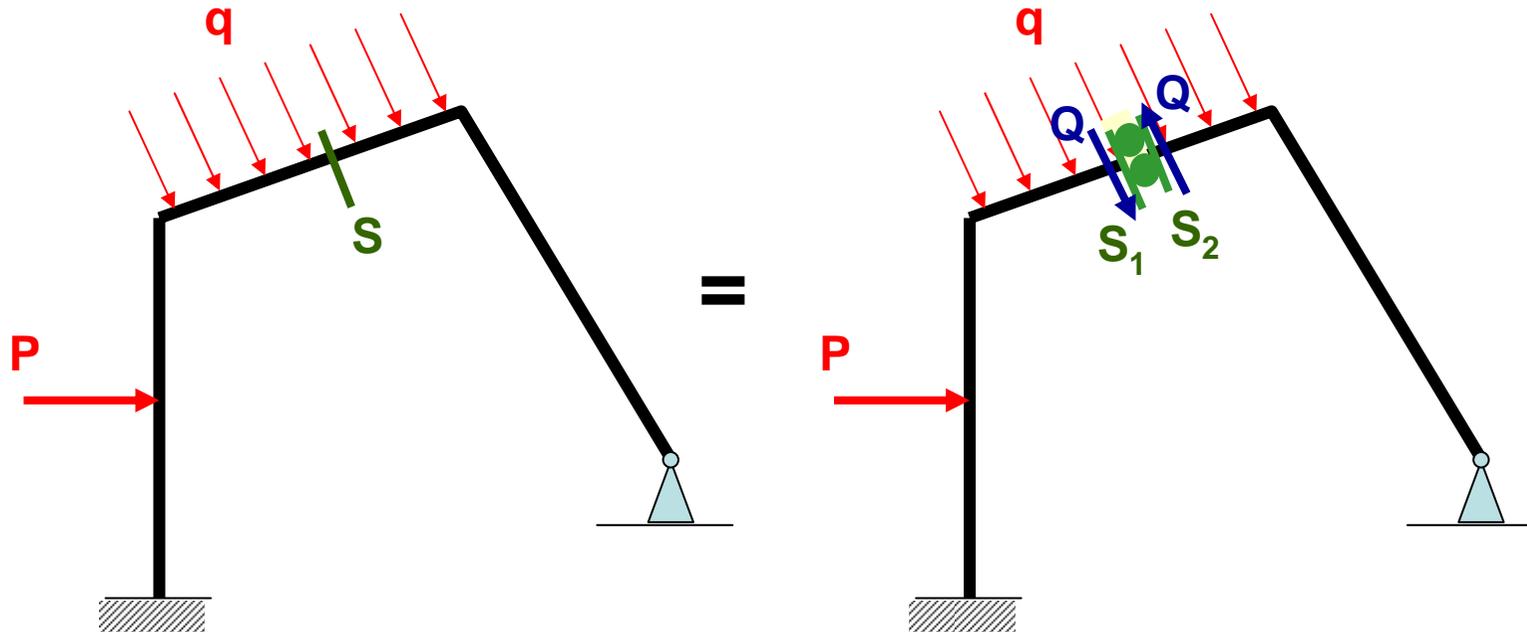
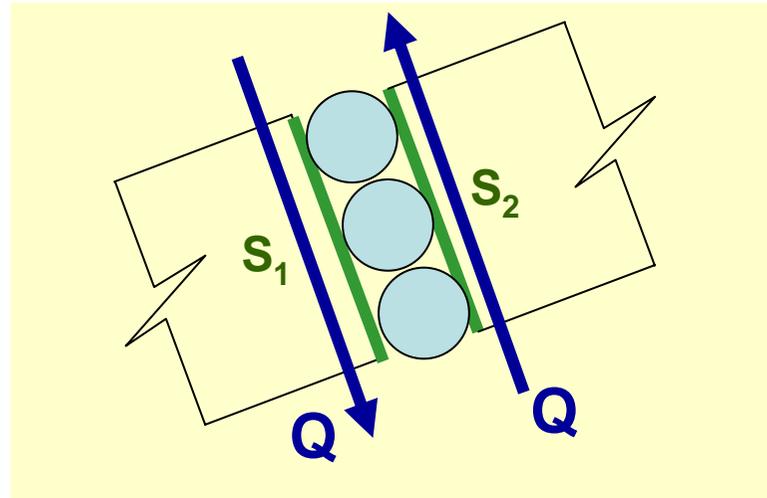
+ Giros de S_1 y S_2 iguales

Momento flector



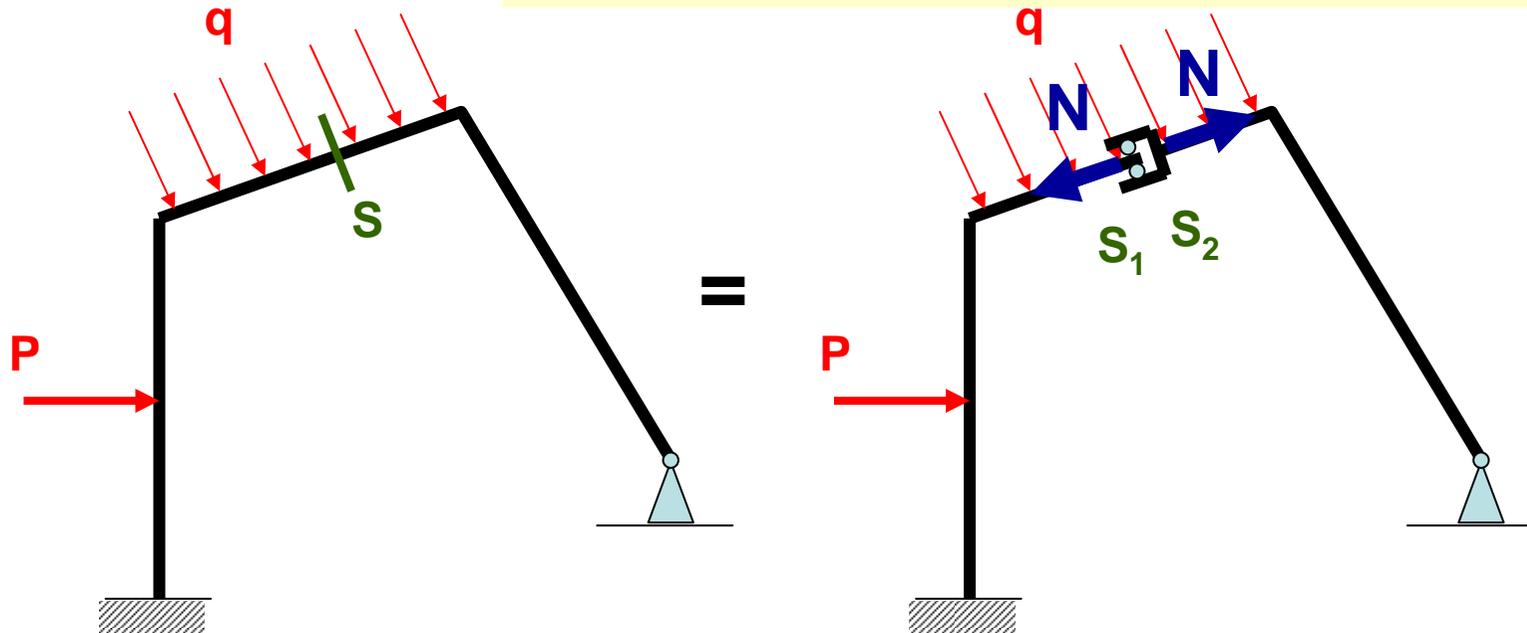
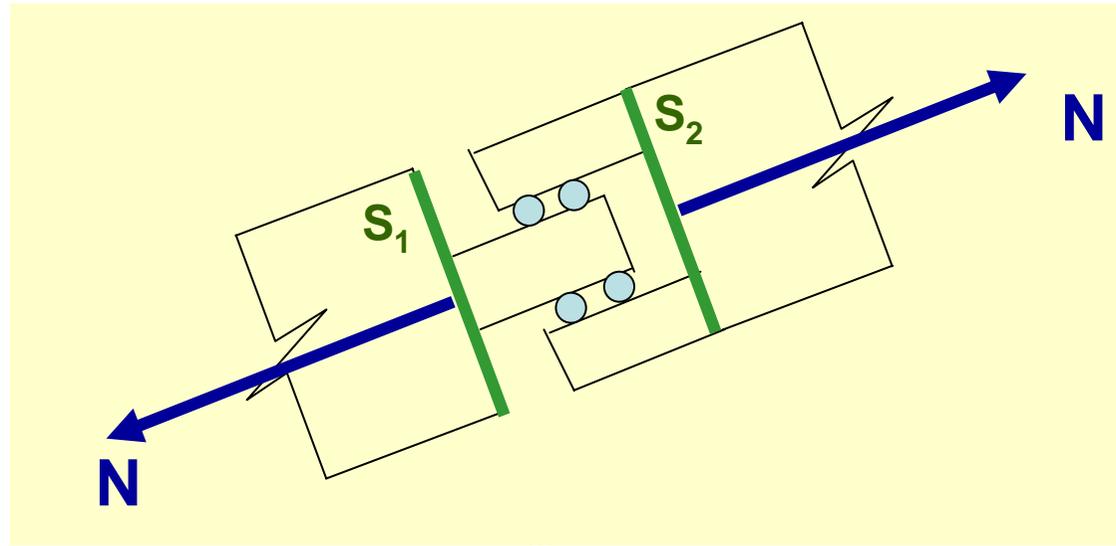
+ Giros de S_1 y S_2 iguales

Esfuerzo cortante



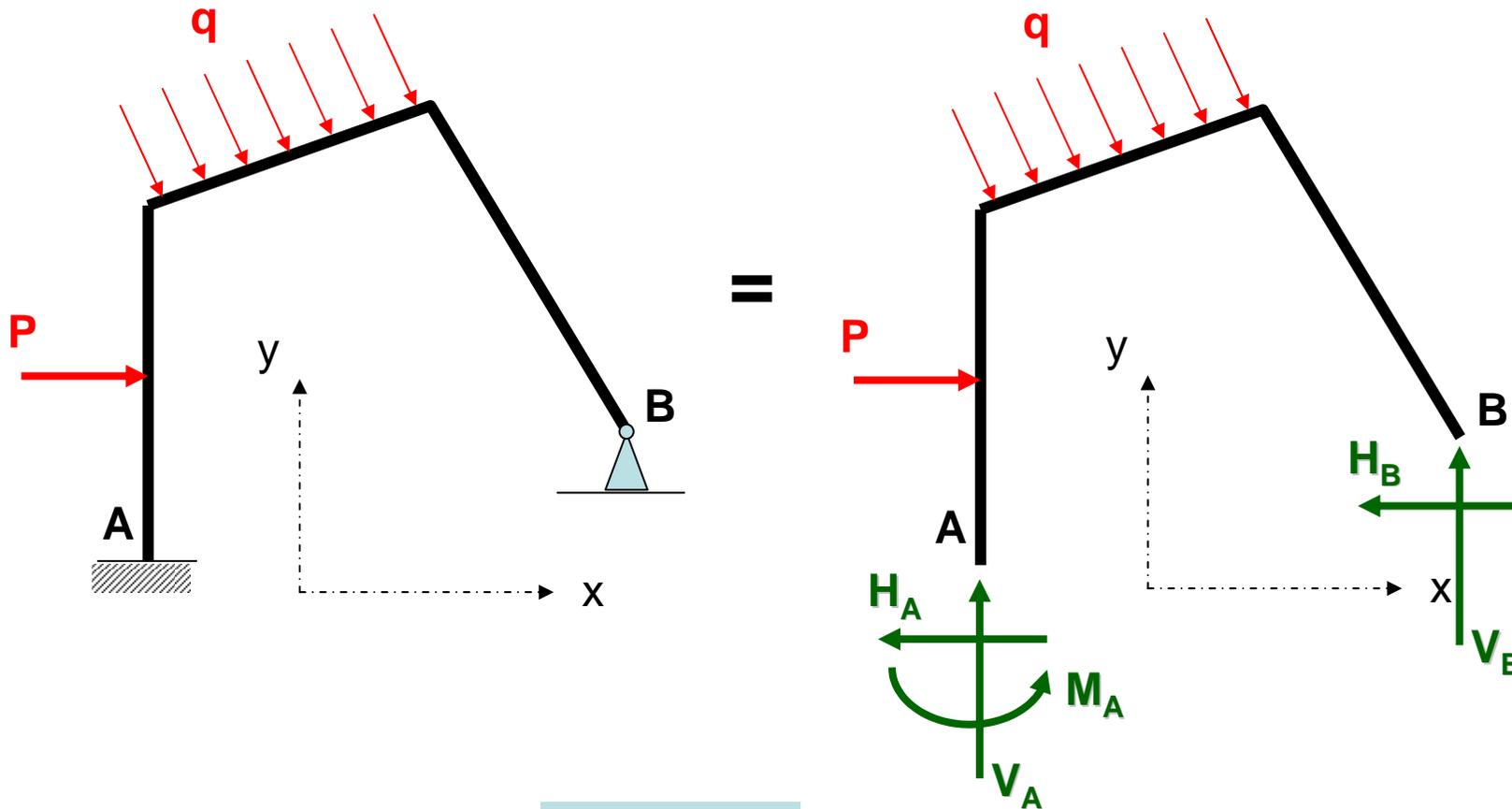
+ Desplazamientos, perpendiculares a la directriz, de S_1 y S_2 iguales

Esfuerzo axial



+ Desplazamientos, en la dirección de la directriz, de S_1 y S_2 iguales

2.- Liberación de coacciones externas

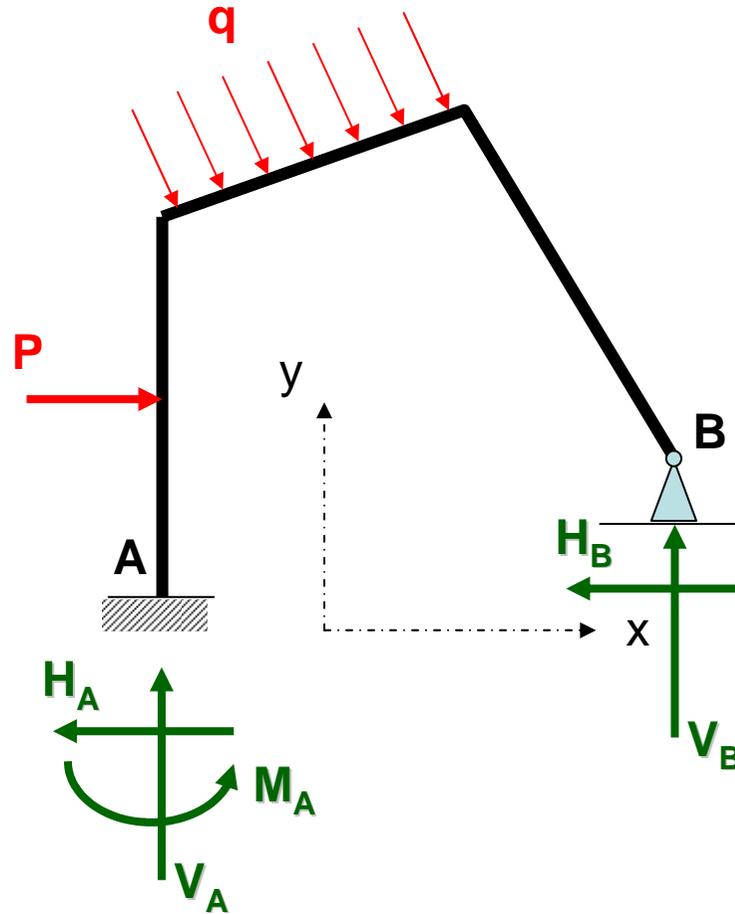


$$\sum F_x = 0$$

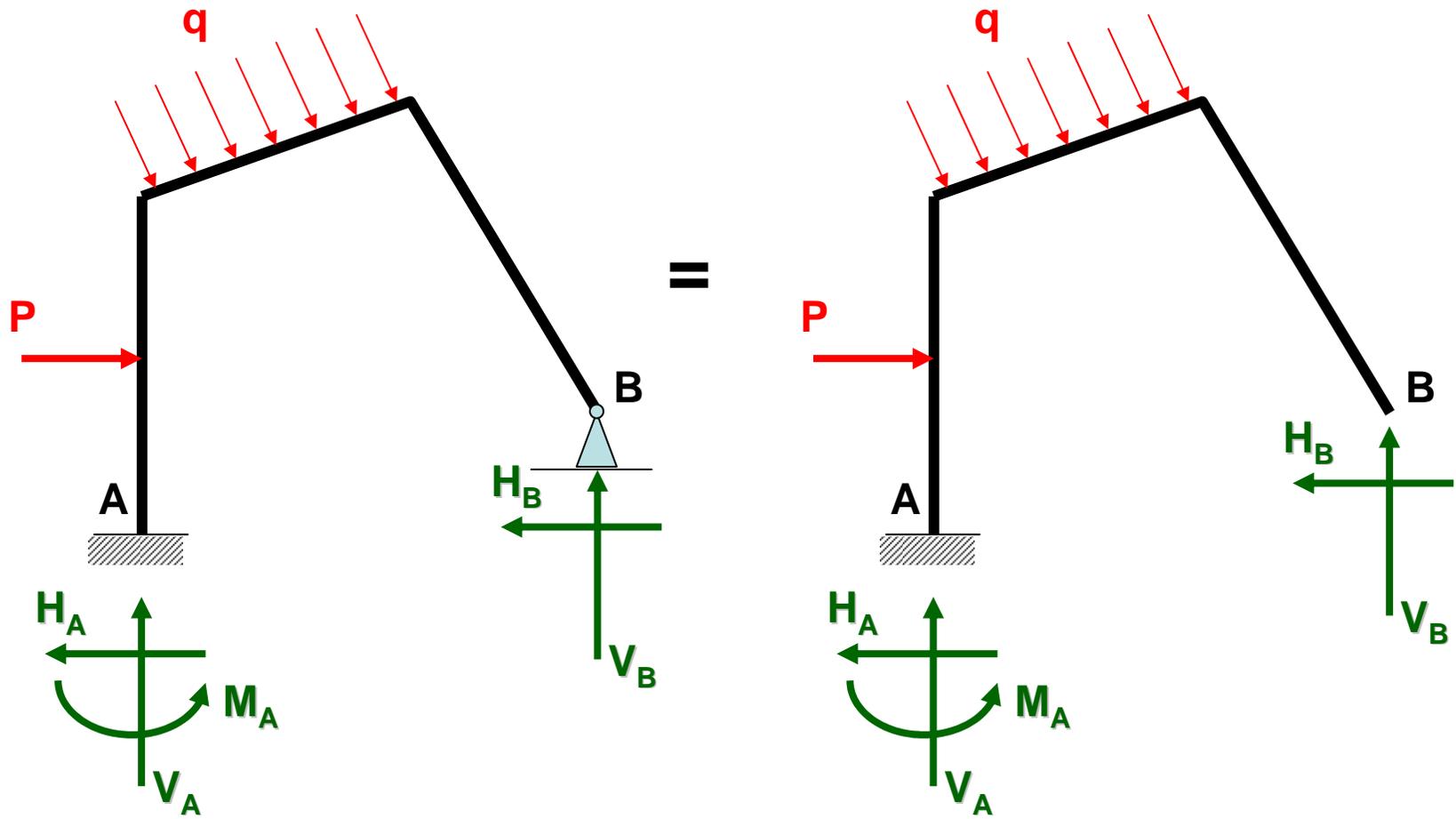
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

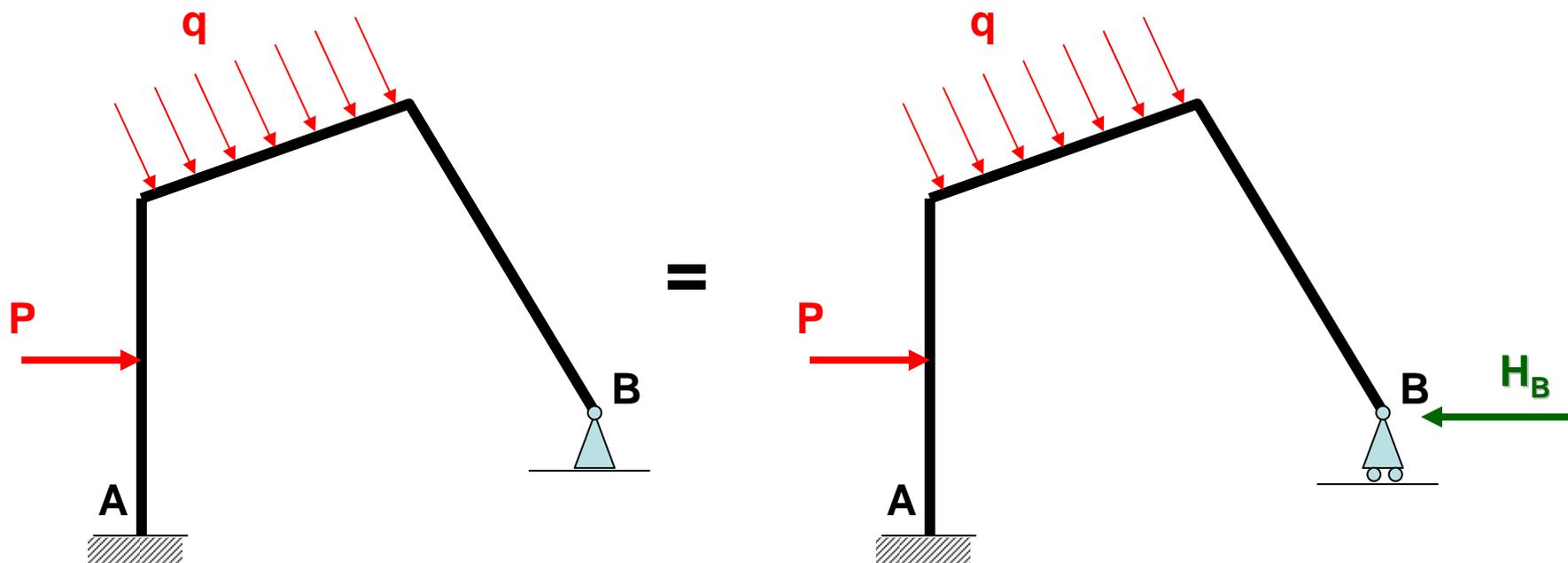
En Resistencia de Materiales y en Cálculo de Estructuras es muy común representar las ligaduras estructurales y las reacciones juntas:



Este proceder no es conceptualmente correcto (aunque haremos así frecuentemente) porque las reacciones son consecuencia de las ligaduras y debieran dibujarse cuando no se representan aquéllas.

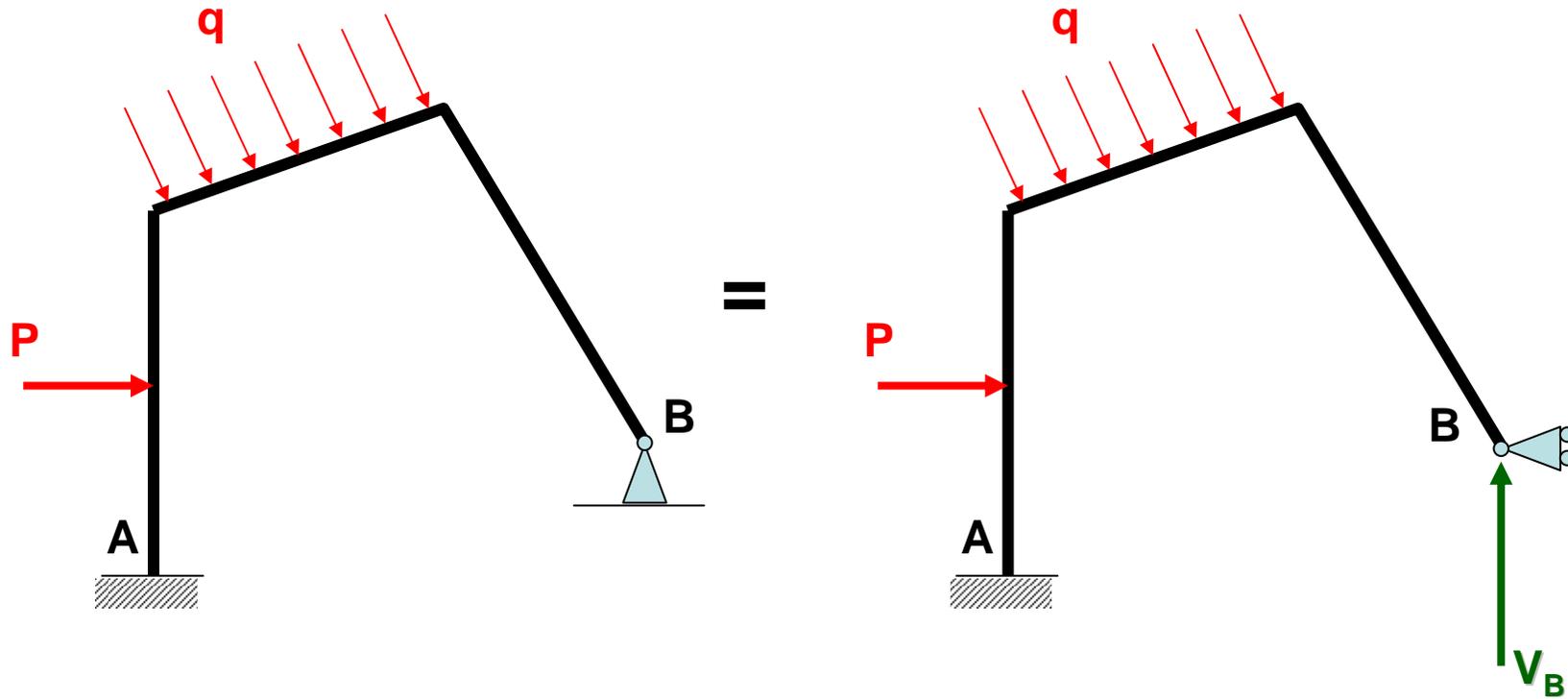


Liberación de una reacción horizontal



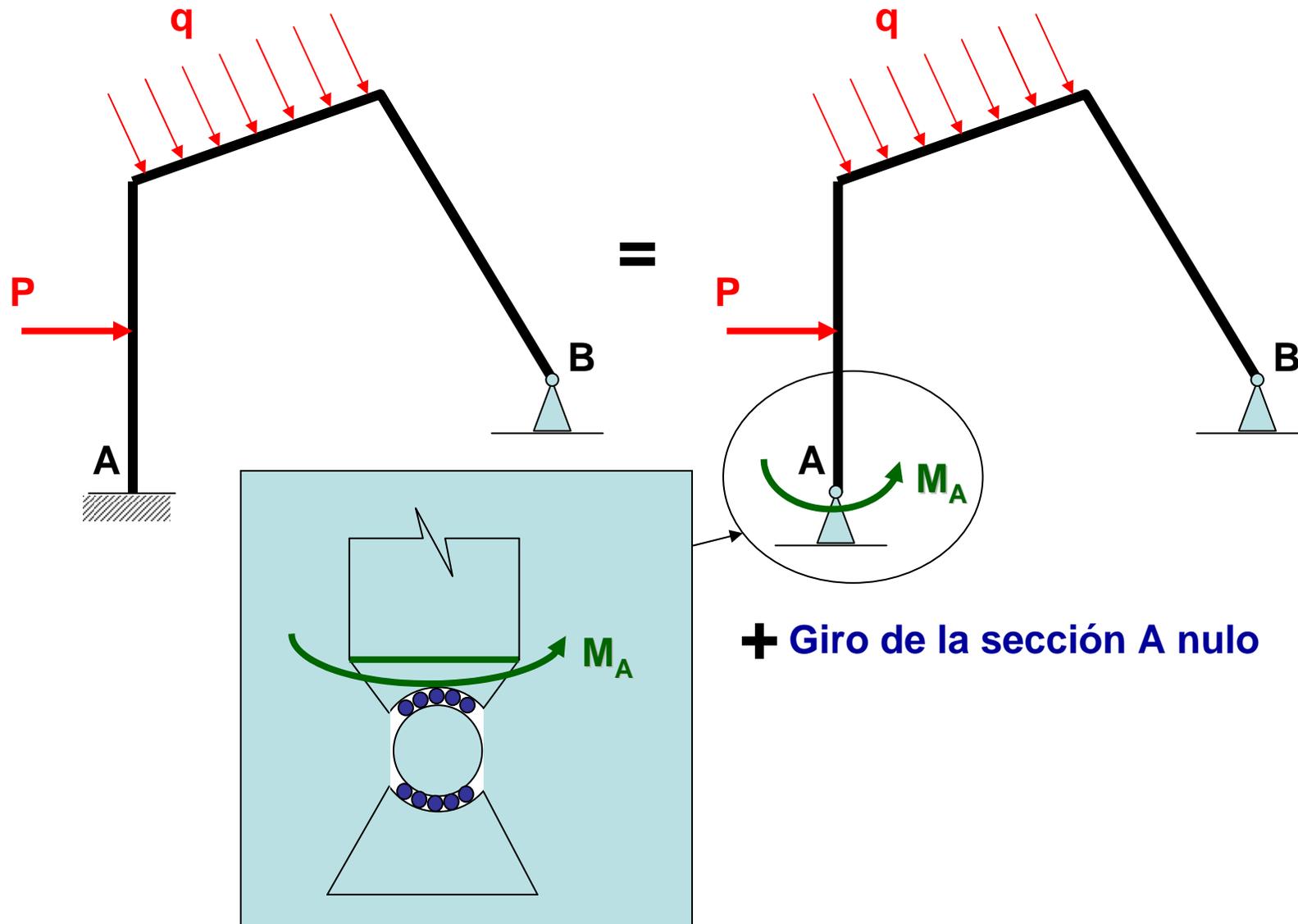
+ Desplazamiento horizontal de B nulo

Liberación de una reacción vertical

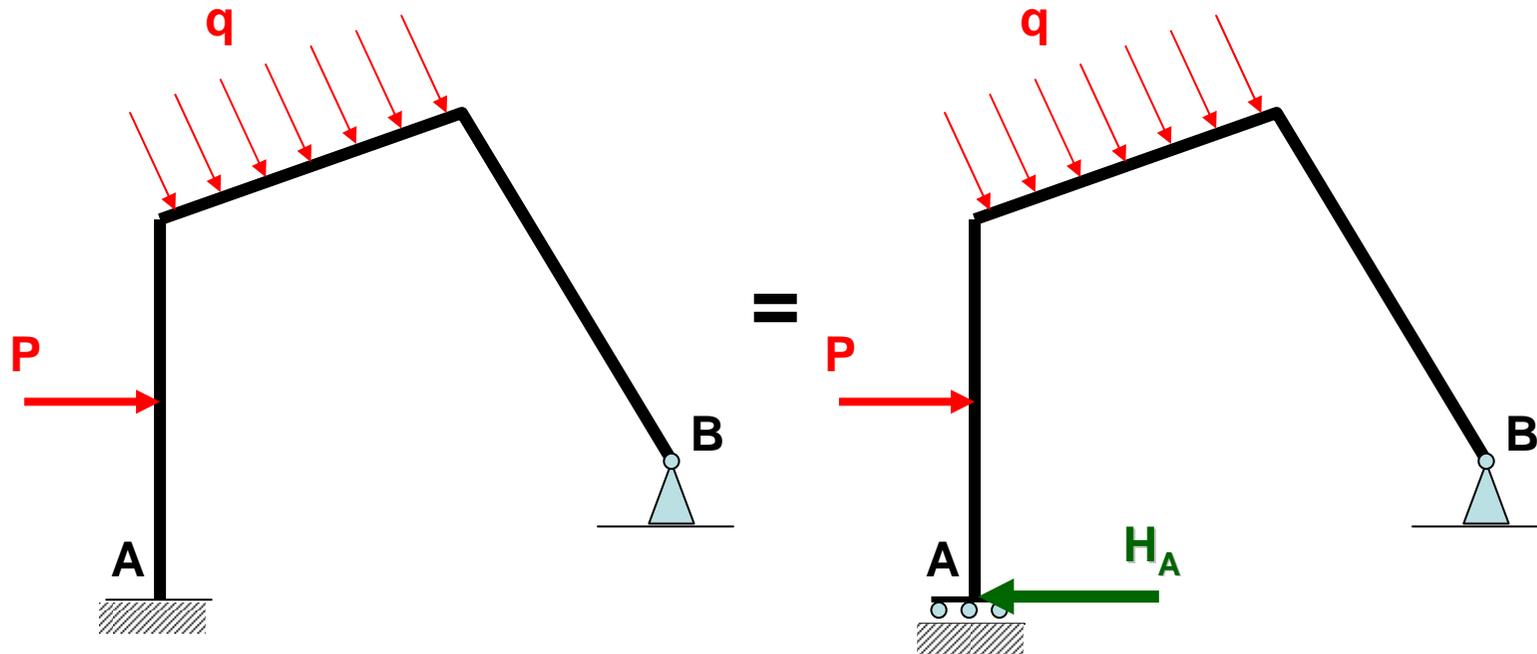


+ Desplazamiento vertical de B nulo

Liberación de un momento de empotramiento



Liberación de una reacción horizontal



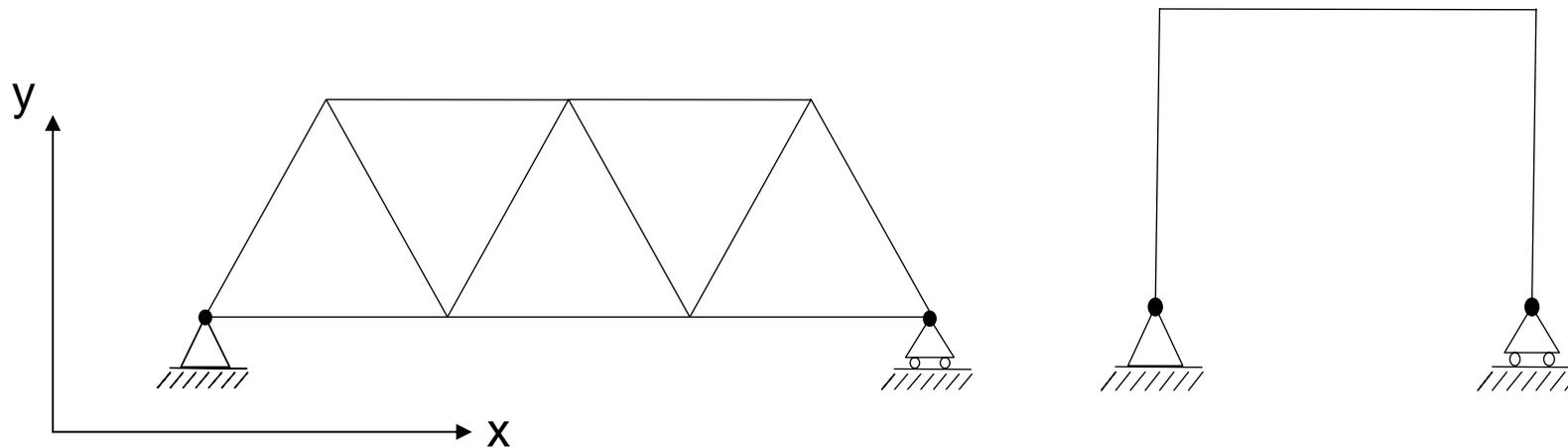
+ Desplazamiento horizontal de A nulo

ISOSTATISMO E HIPERESTATISMO EN ESTRUCTURAS DE BARRAS

“Visión externa “ del sistema del sistema estructural

Se define como “visión externa” de la estructura o sistema de barras, su visión como cuerpo rígido cuyos 3 grados de libertad (en el plano) están restringidos por los apoyos o coacciones externas.

Cualquiera de las estructuras que, como ejemplo, se esquematizan en la figura:

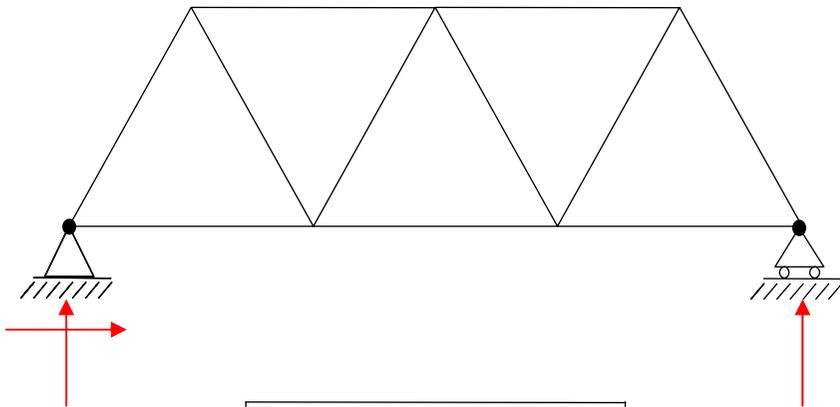


pueden considerarse como cuerpos rígidos de 3 g.d.l. con tres coacciones externas y ser calificadas, en consecuencia, como isostáticas externas.

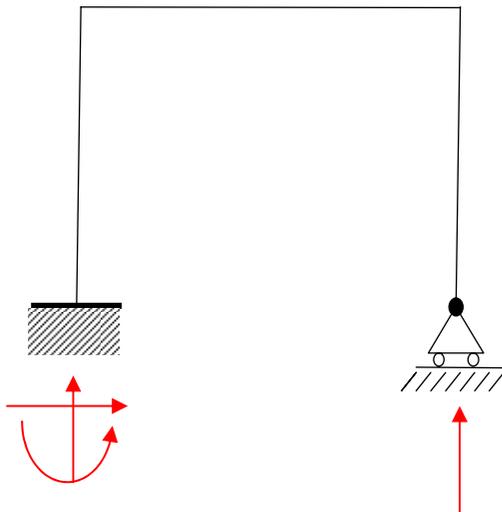
Con sólo las tres ecuaciones de la estática, correspondientes al caso plano, se pueden Determinar las “reacciones externas”:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

Se define como Grado de Hiperestatismo Externo (G.H.E.) la diferencia entre el número de coacciones externas (C.E.) y el número de grados de libertad externos (G.D.L.E. (=3))



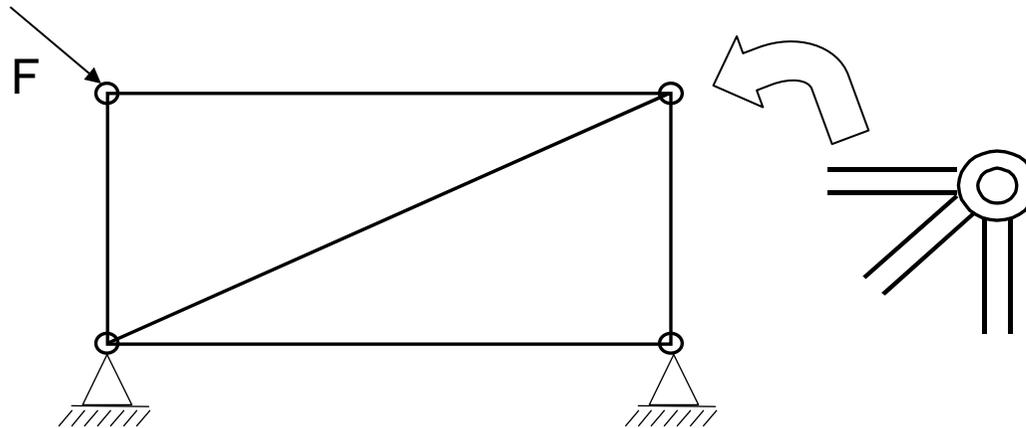
CE=3
GDLE=3
GHE=0 (estructura isostática externa)



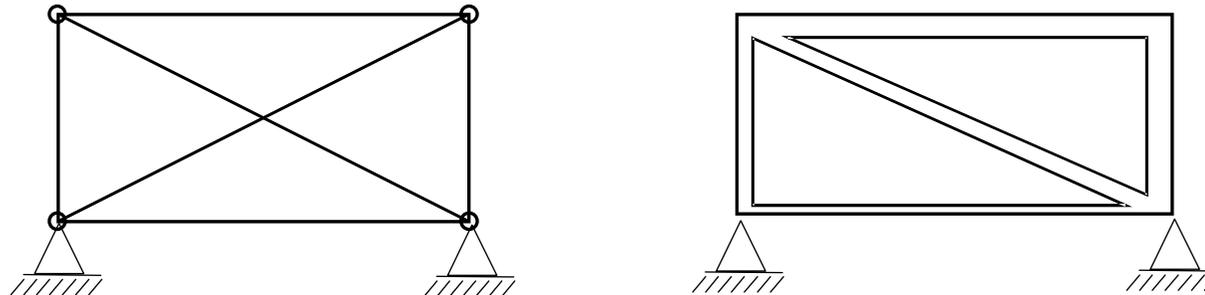
CE=4
GDLE=3
GHE=1 (estructura hiprestática externa)

“Visión interna “ del sistema del sistema estructural

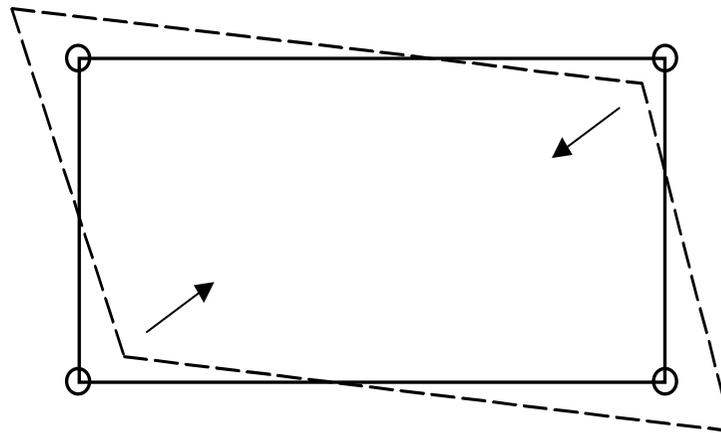
Cuando los enlaces internos son los estrictamente necesarios para impedir los movimientos relativos entre los cuerpos (barras), que producirían las cargas actuantes sobre el sistema estructural, se pueden determinar las reacciones internas mediante las ecuaciones de equilibrio aplicadas a los nudos. El sistema se dice, entonces, que es internamente isostático.



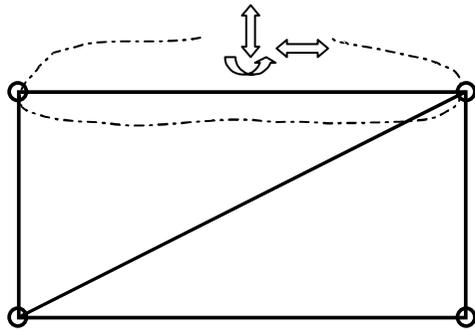
Si hay más enlaces internos que los necesarios, el sistema se dice que es internamente hiperestático:



Si hay menos enlaces internos que los necesarios el sistema se dice que es internamente deformable o mecanismo:



Grados de libertad internos.- Los grados de libertad internos están asociados al número de barras que constituyen la estructura; si éstas estuviesen sueltas, el número total de grados de libertad internos sería $3n$; dado que, al estar unidas, constituyen un sólido rígido con 3 grados de libertad (ya considerados como externos), el número de grados de libertad internos es, pues, $3n-3$.



$3n$ (barras)

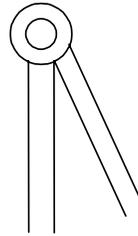
3 gdl's como sólido rígido

$3n-3$ GDLI

Coacciones internas

Las coacciones internas (o impedimentos a ejercitar los grados de libertad internos) están asociados con las ligaduras existentes entre las barras entre sí en los nudos. Para el análisis de estas coacciones en cada nudo se han de considerar dos parámetros: el número de barras que confluyen en el nudo y el sistema de unión barra- nudo (rótulas o empotramiento).

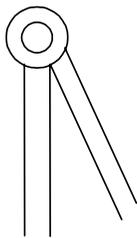
Caso de dos barras articuladas entre sí:



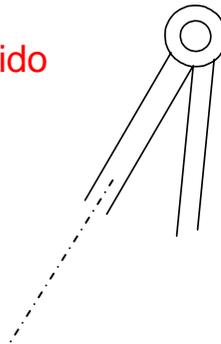
Posición inicial



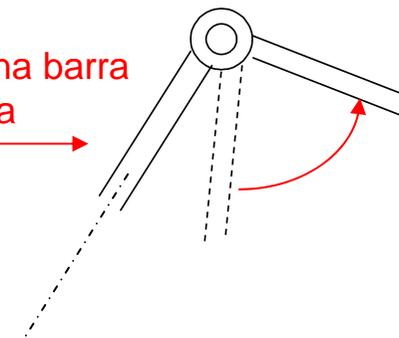
Posición final



Giro como sólido rígido
de las dos barras

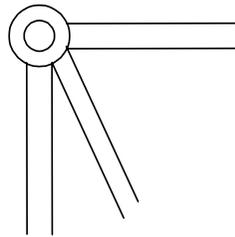


Giro relativo de una barra
respecto de la otra

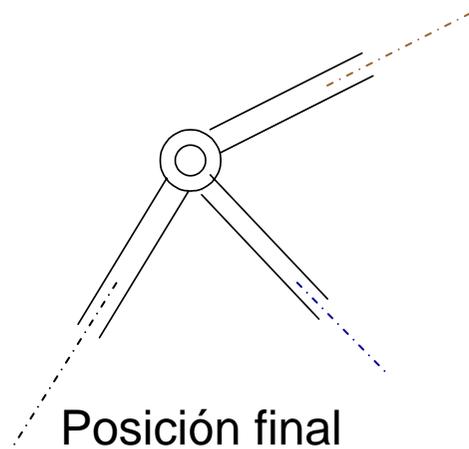


La articulación le “quita” a cada barra 2 traslaciones (total $2n$); pero el eje de la articulación conserva esos dos grados de libertad con lo que las coacciones son $2n-2= 2(n-1)$; en este caso de dos barras, el número de coacciones es $2(2-1)=2$

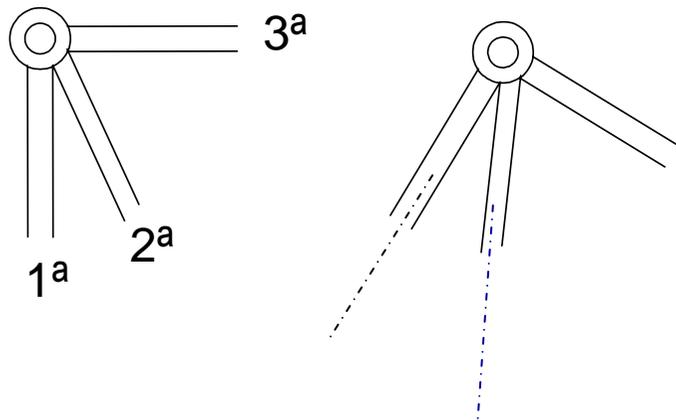
Caso de tres barras articuladas entre sí



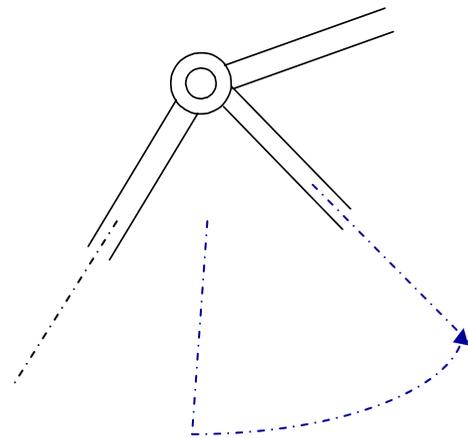
Posición inicial



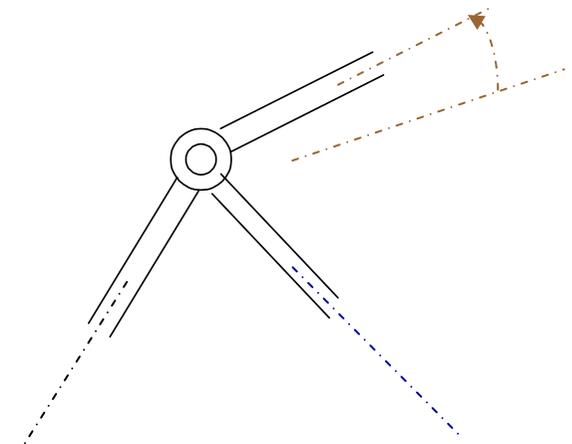
Posición final



Giro como sólido rígido de las tres barras



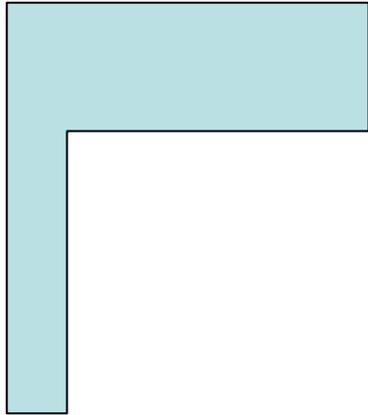
Giro relativo de la segunda y tercera barras (como sólido rígido) respecto de la primera



Giro relativo de la tercera barra respecto de la segunda

Con el mismo razonamiento que el utilizado en el caso anterior, se llega a que el número de coacciones es $2n-2=2(n-1)$; en este ejemplo de tres barras, el número de coacciones resulta $2(3-1)=4$

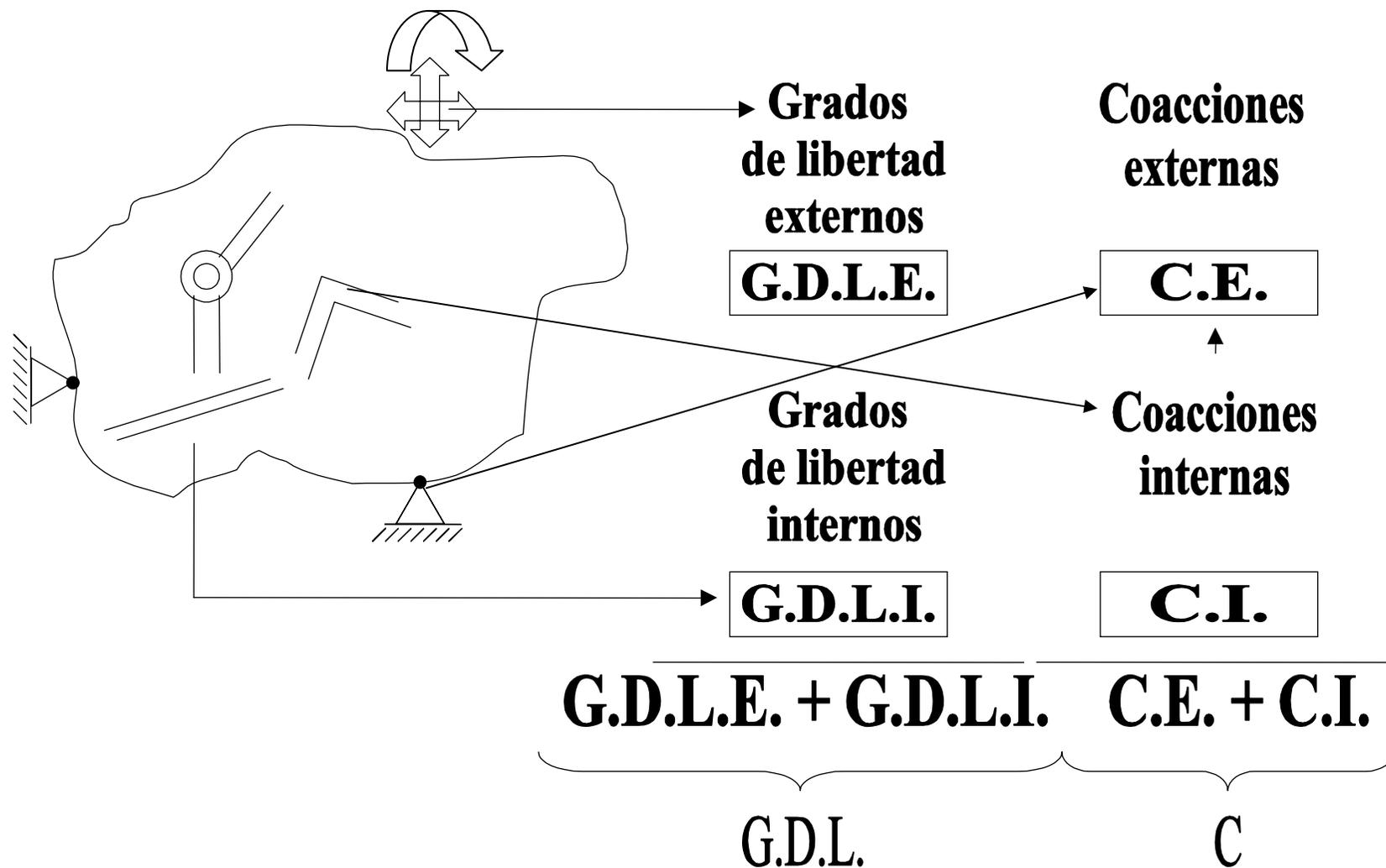
Caso de dos vigas empotradas entre sí



El empotramiento le “quita” a cada barra los tres g.d.l. (total $3n$); pero el eje del empotramiento conserva esos tres g. d. l. Con lo que las coacciones son $3n-3=3(n-1)$; en este caso de dos barras, el número de coacciones es $3(2-1)=3$

Se define como Grado de Hiperestatismo Interno la diferencia entre el número CI de coacciones internas y el número G.D.L.I. de grados de libertad internos

“ Visión global “ del sistema



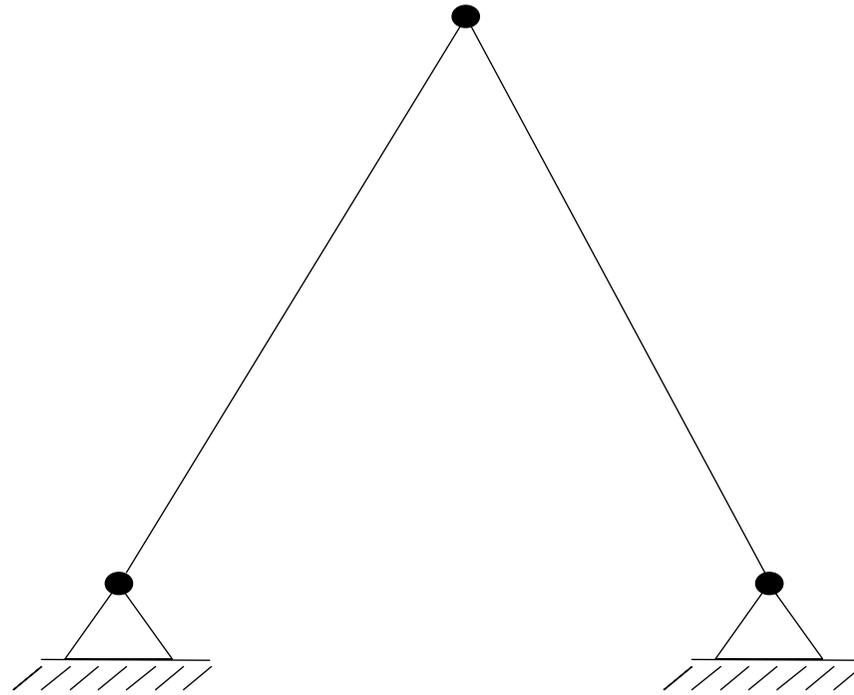
Grado de hiperestatismo

Se define como Grado de Hiperestatismo la diferencia entre el número C de coacciones tanto internas como externas y el número G.D.L. de grados de libertad tanto internos como externos

Si el grado de hiperestatismo así calculado es:

- > 0 la estructura es hiperestática
- < 0 la estructura es un mecanismo

Si el grado de hiperestatismo es cero, no puede afirmarse que la estructura sea isostática pues podrían existir vínculos externos superabundantes y ser internamente deformable o viceversa.



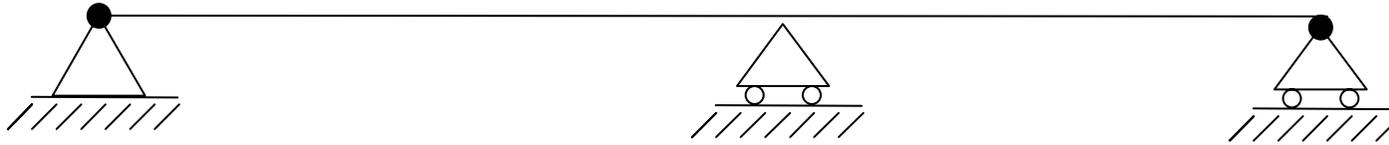
$$\text{G.D.L.E.} = 3$$

$$\text{G.D.L.I.} = 3 \cdot (2-1) = 3$$

$$\text{C.E.} = 4$$

$$\text{C.I.} = 2 \cdot 2 \cdot (1-1) + 1 \cdot 2 \cdot (2-1) = 2$$

Estructura isostática



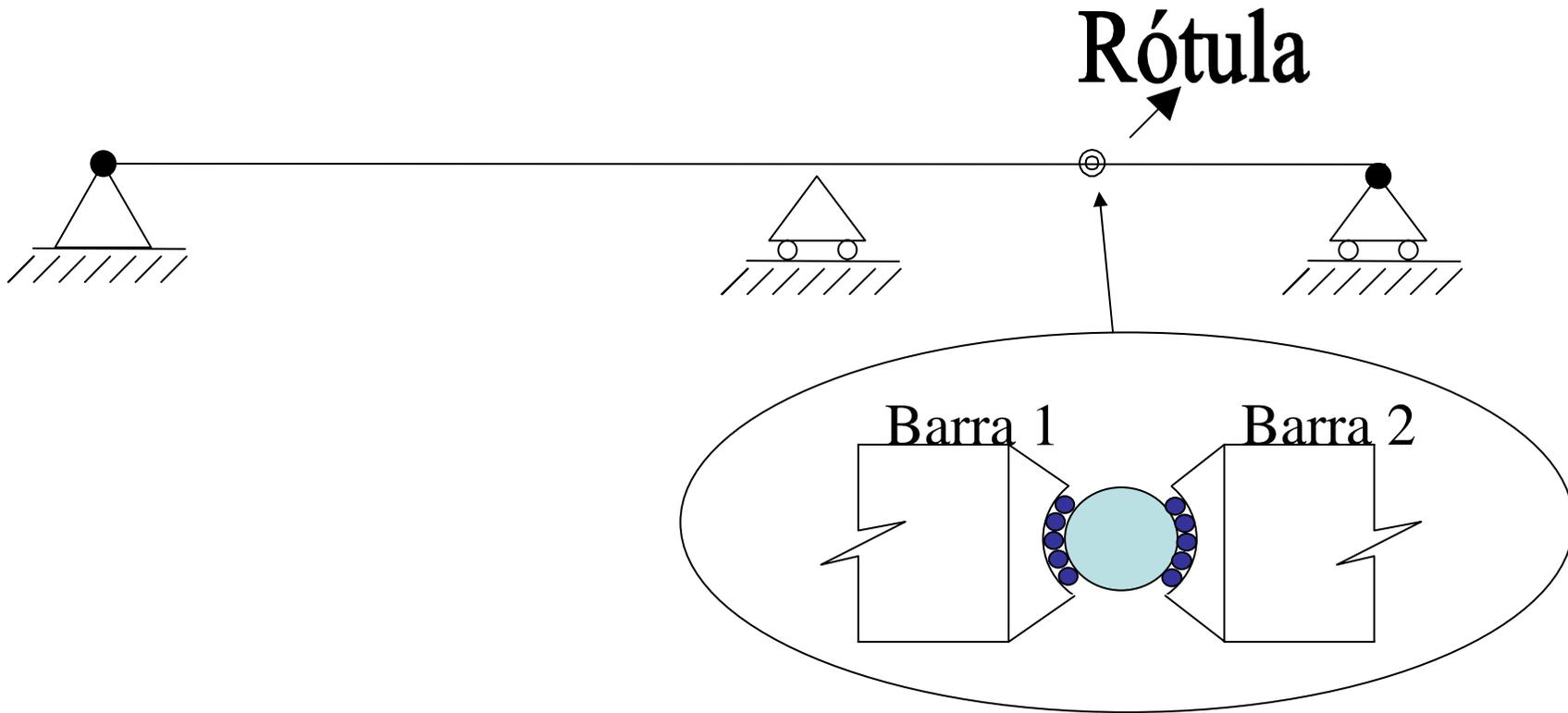
$$\text{G.D.L.E.} = 3$$

$$\text{G.D.L.I.} = 3 \cdot (2-1) = 3$$

$$\text{C.E.} = 4$$

$$\text{C.I.} = 2 \cdot 2 \cdot (1-1) + 1 \cdot 3 \cdot (2-1) = 3$$

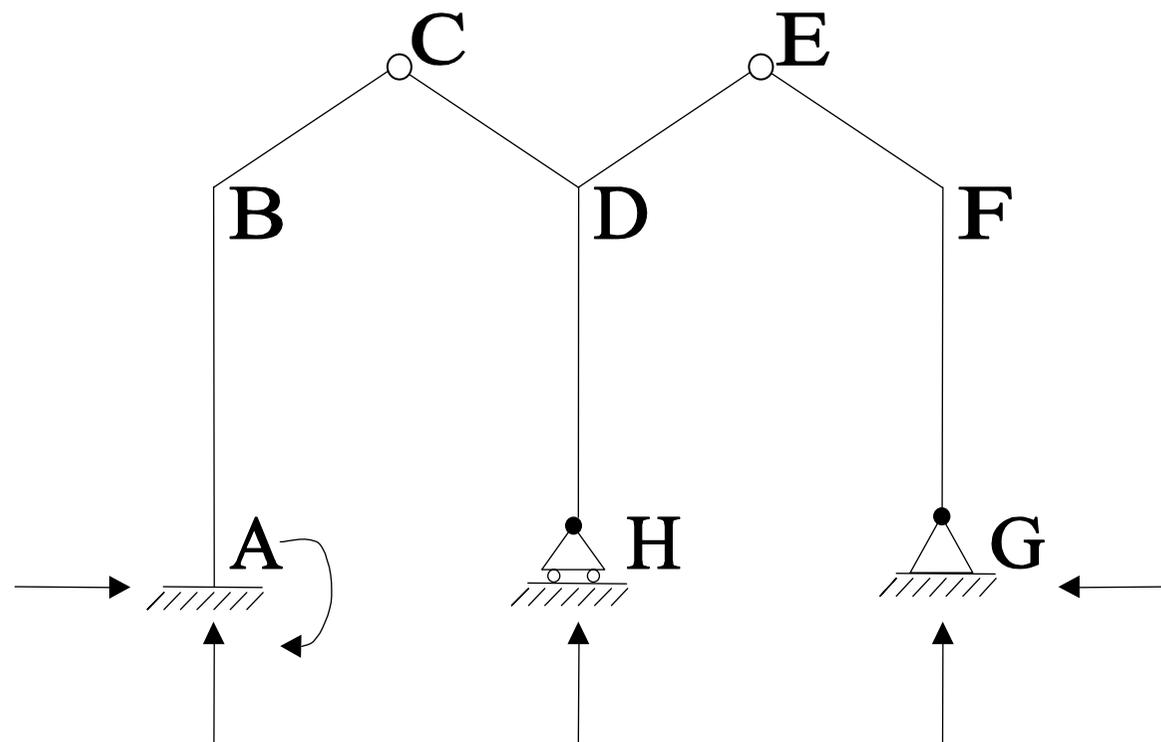
Estructura hiperestática de grado 1



G.D.L.E. = 3
G.D.L.I. = 3*(3-1) = 6

C.E. = 4
C.I. = 2*2*(1-1) + 1*2*(2-1) + 1*3*(2-1) = 5

Estructura isostática



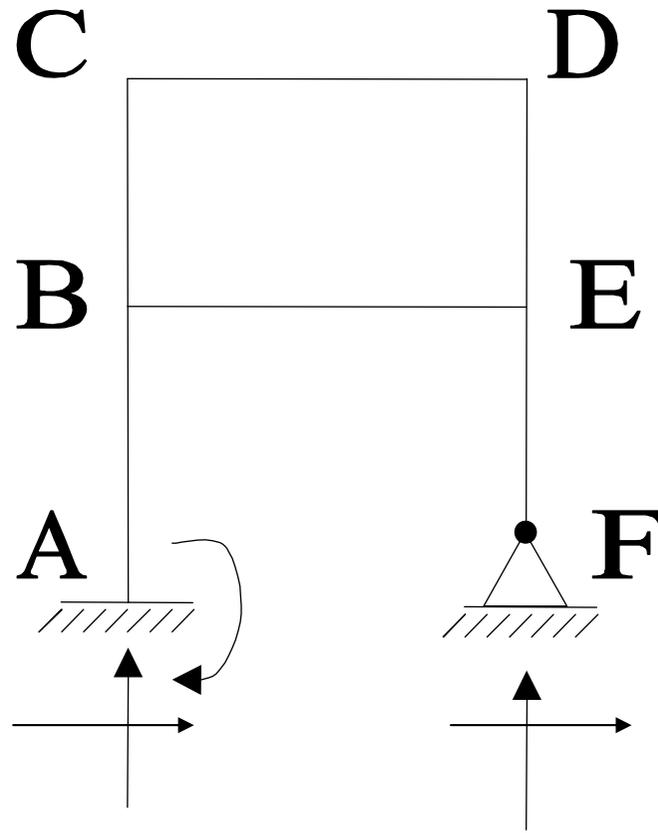
$$\text{G.D.L.E.} = 3$$

$$\text{G.D.L.I.} = 3 \cdot (7 - 1) = 18$$

$$\text{C.E.} = 6$$

$$\text{C.I.} = 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 3 \cdot (2 - 1) + 1 \cdot 3 \cdot (3 - 1) = 16$$

Estructura hiperestática de grado 1



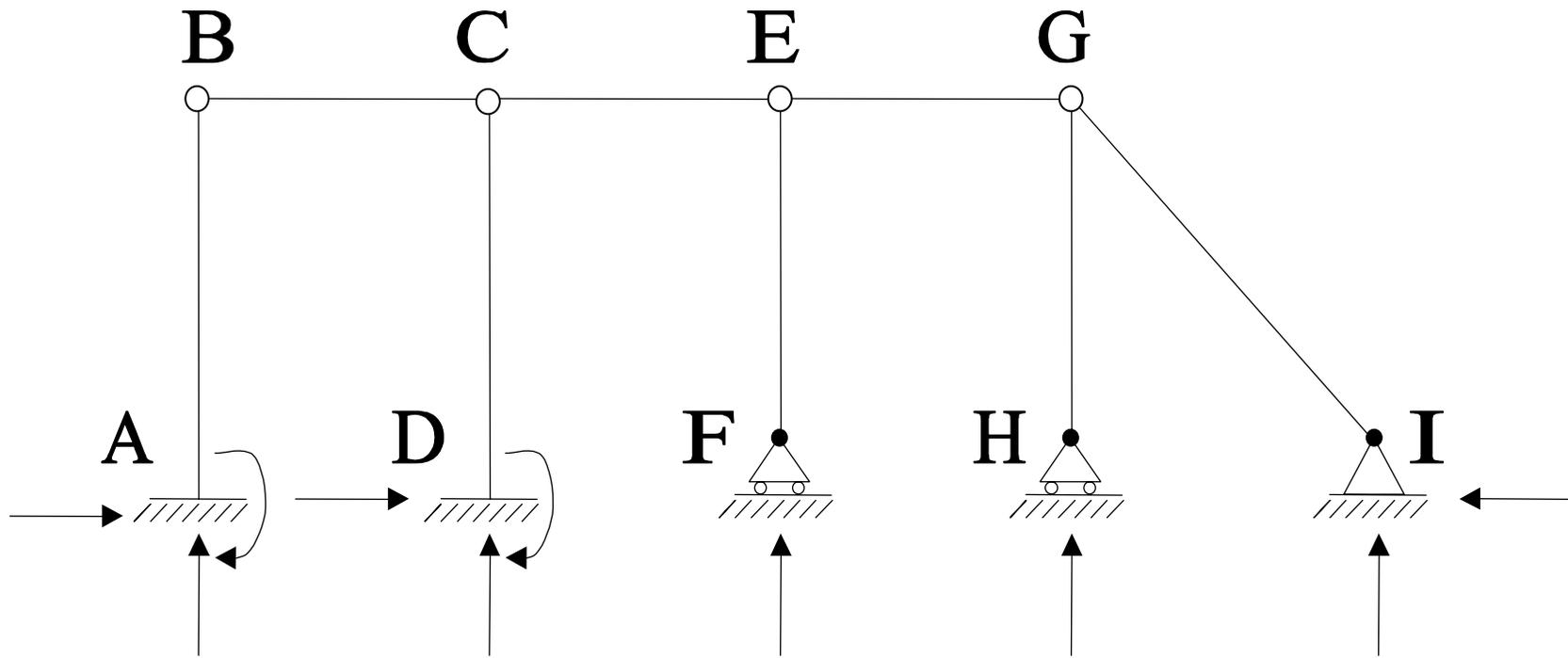
$$\text{G.D.L.E.} = 3$$

$$\text{G.D.L.I.} = 3 \cdot (6-1) = 15$$

$$\text{C.E.} = 5$$

$$\text{C.I.} = 2 \cdot 3 \cdot (2-1) + 2 \cdot 3 \cdot (3-1) = 18$$

Estructura hiperestática de grado 5



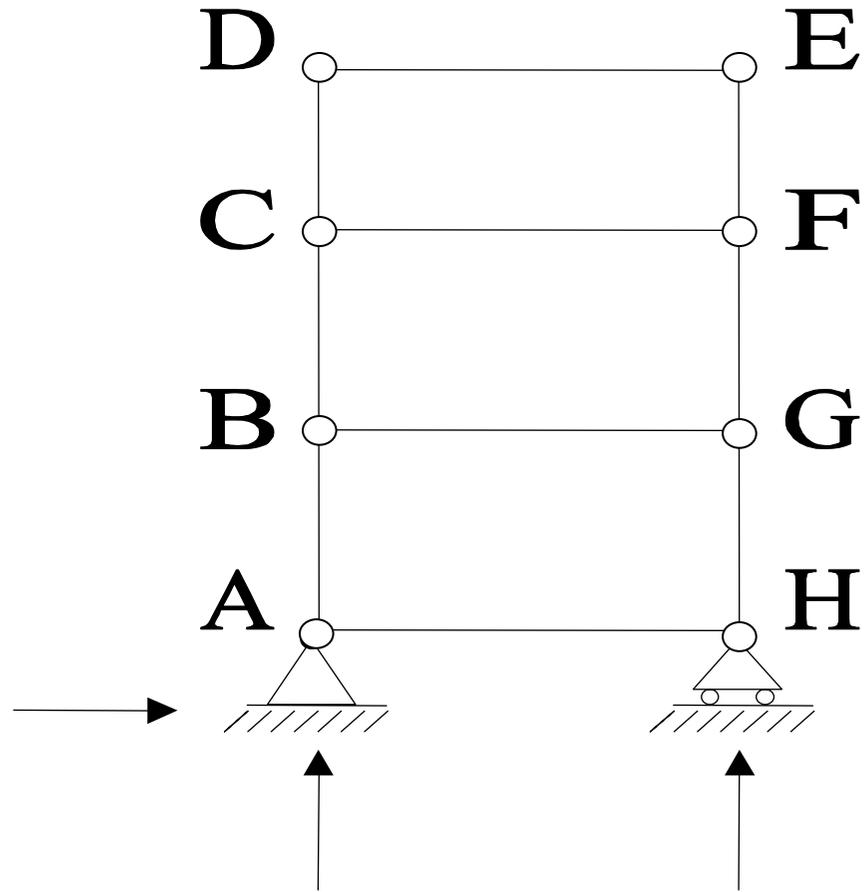
$$\text{G.D.L.E.} = 3$$

$$\text{G.D.L.I.} = 3 \cdot (8 - 1) = 21$$

$$\text{C.E.} = 10$$

$$\text{C.I.} = 1 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 3 \cdot 2 \cdot (3 - 1) = 14$$

Estructura isostática



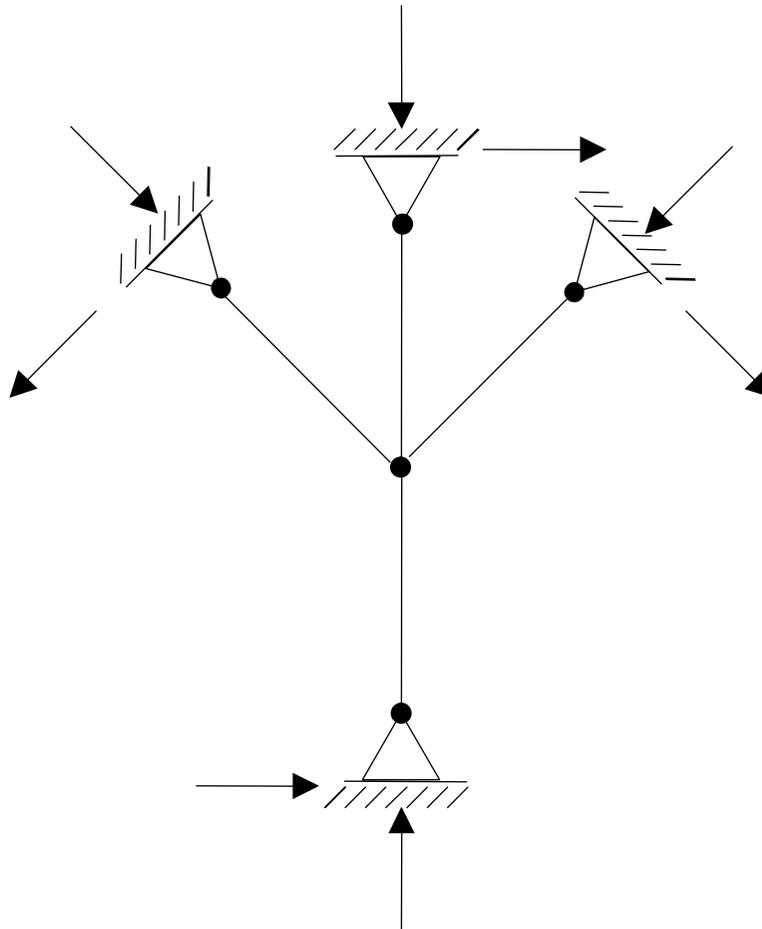
G.D.L.E. = 3

G.D.L.I. = $3 \cdot (10 - 1) = 27$

C.E. = 3

C.I. = $4 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 4 \cdot 2 \cdot (3 - 1) = 24$

Mecanismo con un grado de hiperestatismo 3



G.D.L.E. = 3

G.D.L.I. = $3 \cdot (4 - 1) = 9$

C.E. = 8

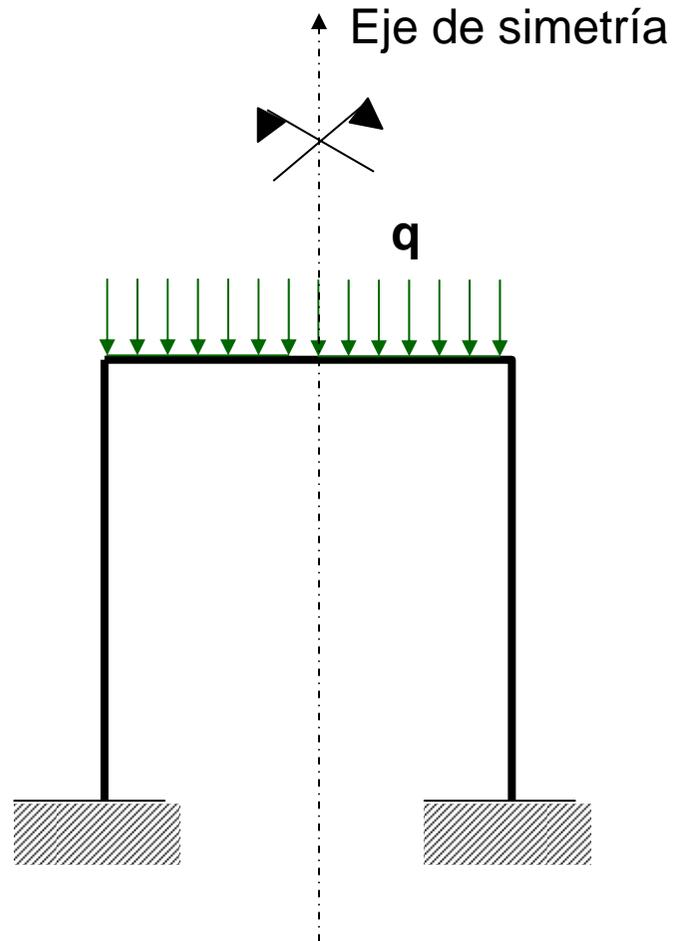
C.I. = $1 \cdot 2 \cdot (4 - 1) = 6$

Estructura hiperestática de grado 2

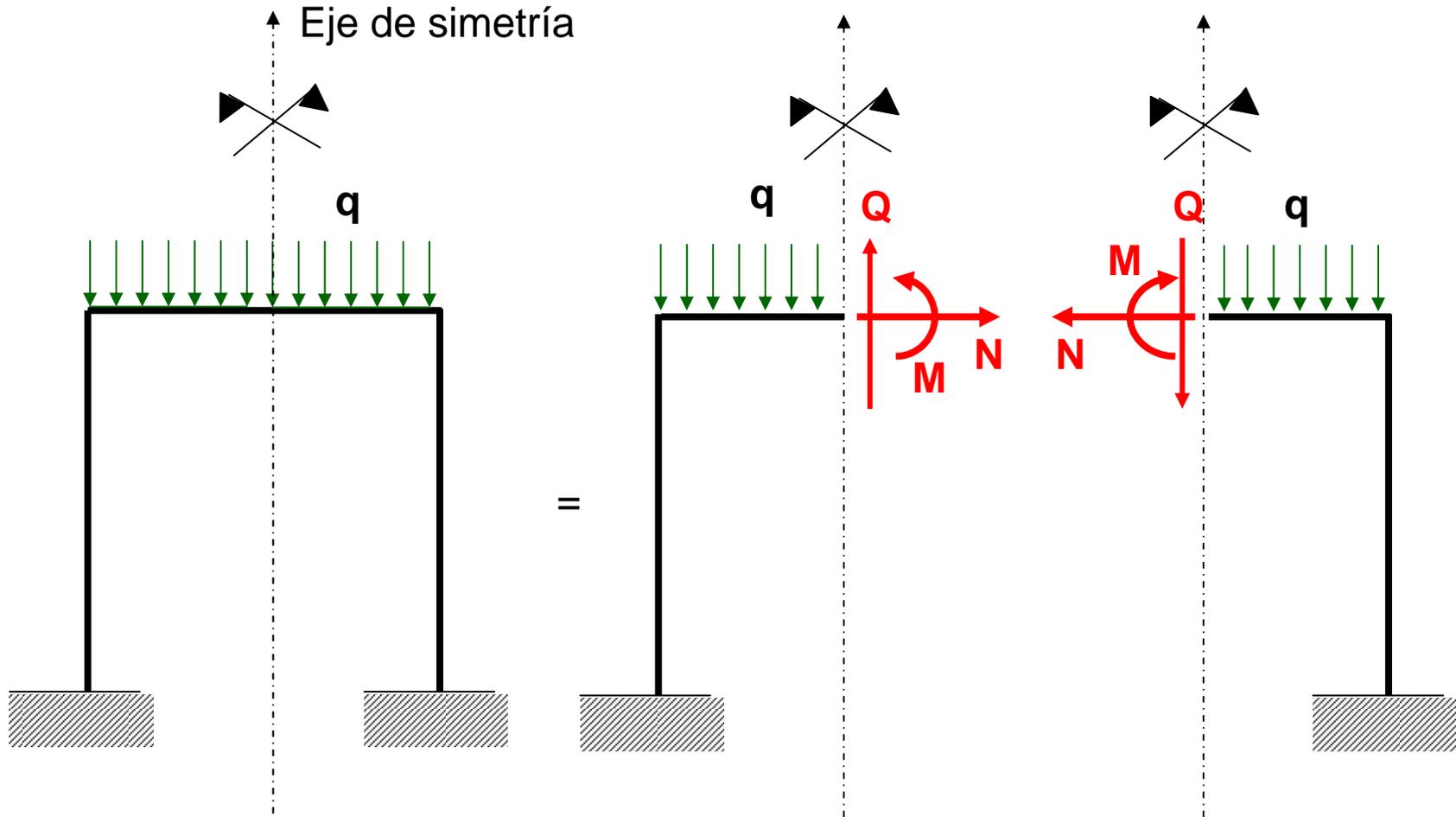
SIMETRÍA Y ANTIMETRÍA EN ESTRUCTURAS DE BARRAS

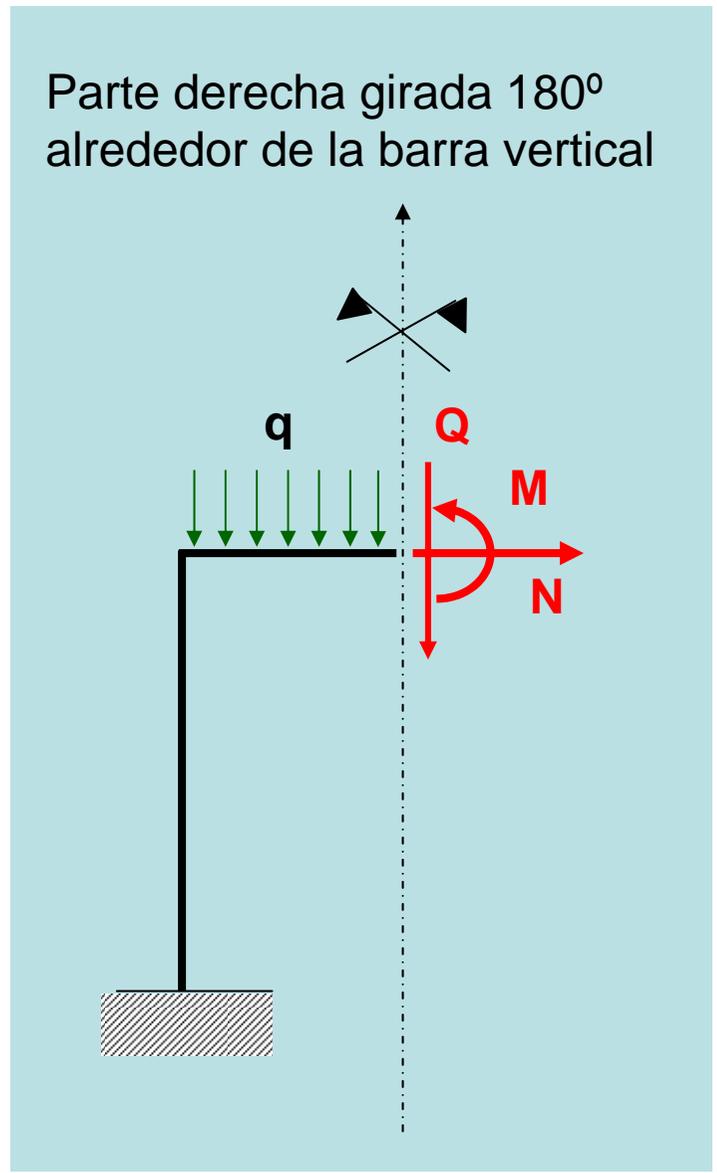
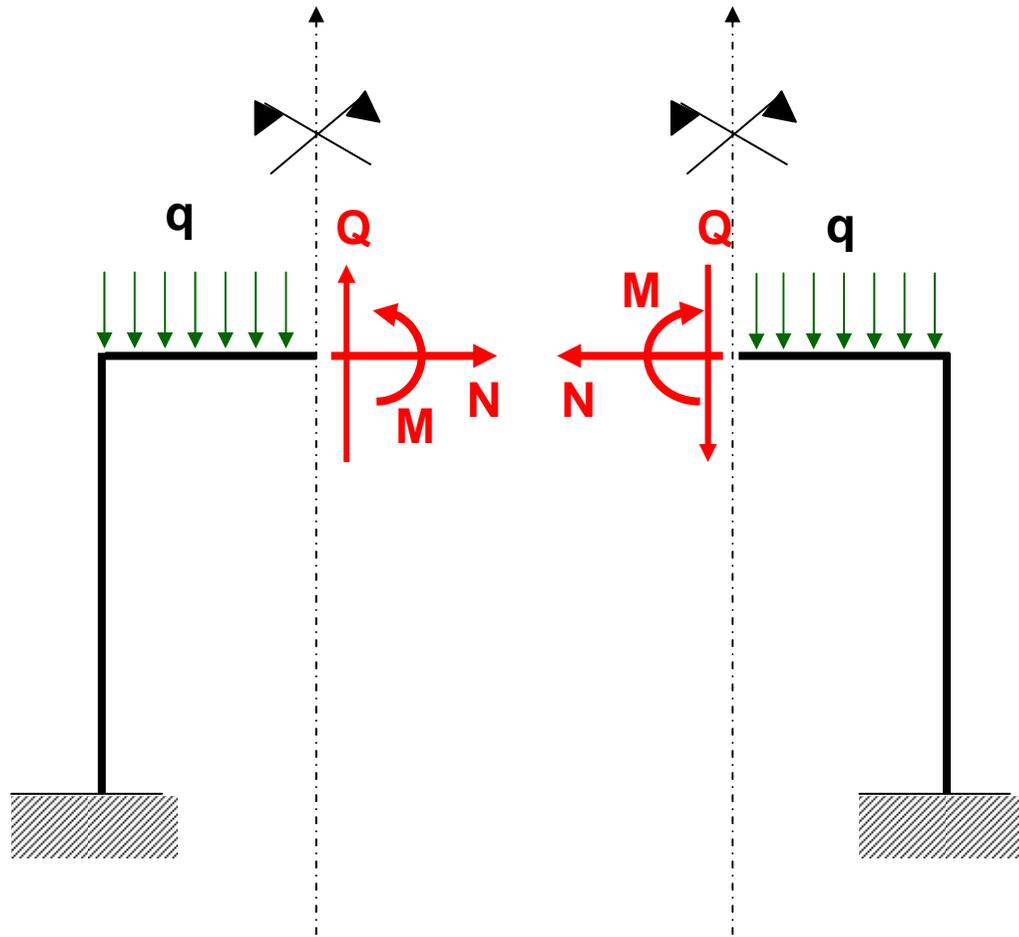
ESTRUCTURAS SIMÉTRICAS DE FORMA RESPECTO DE UN EJE

**CASO 1: ESTRUCTURA SIMÉTRICA RESPECTO DE UN EJE
CON SIMETRÍA DE CARGAS RESPECTO DE ESE EJE**



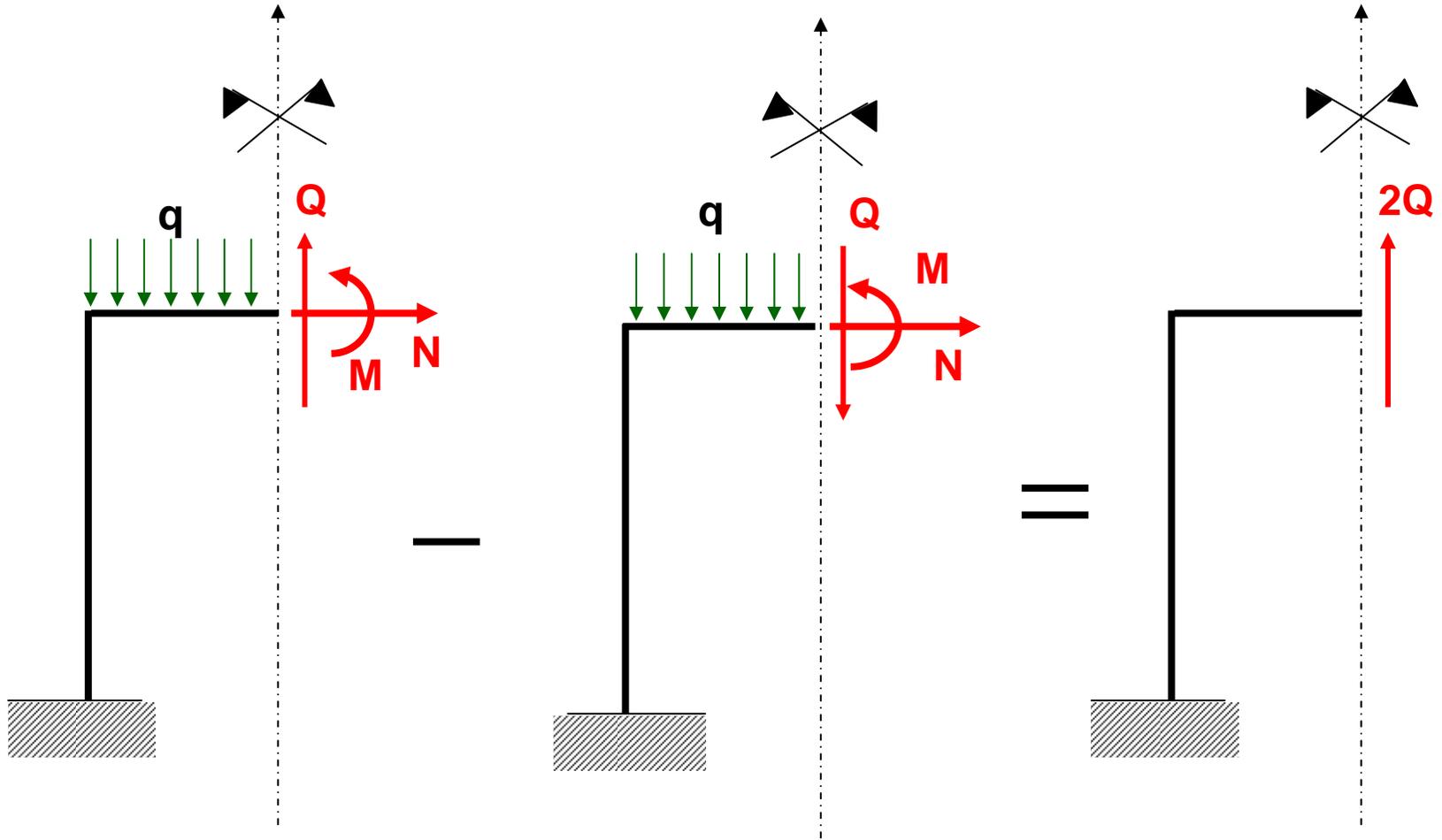
ESTUDIO DE ESFUERZOS



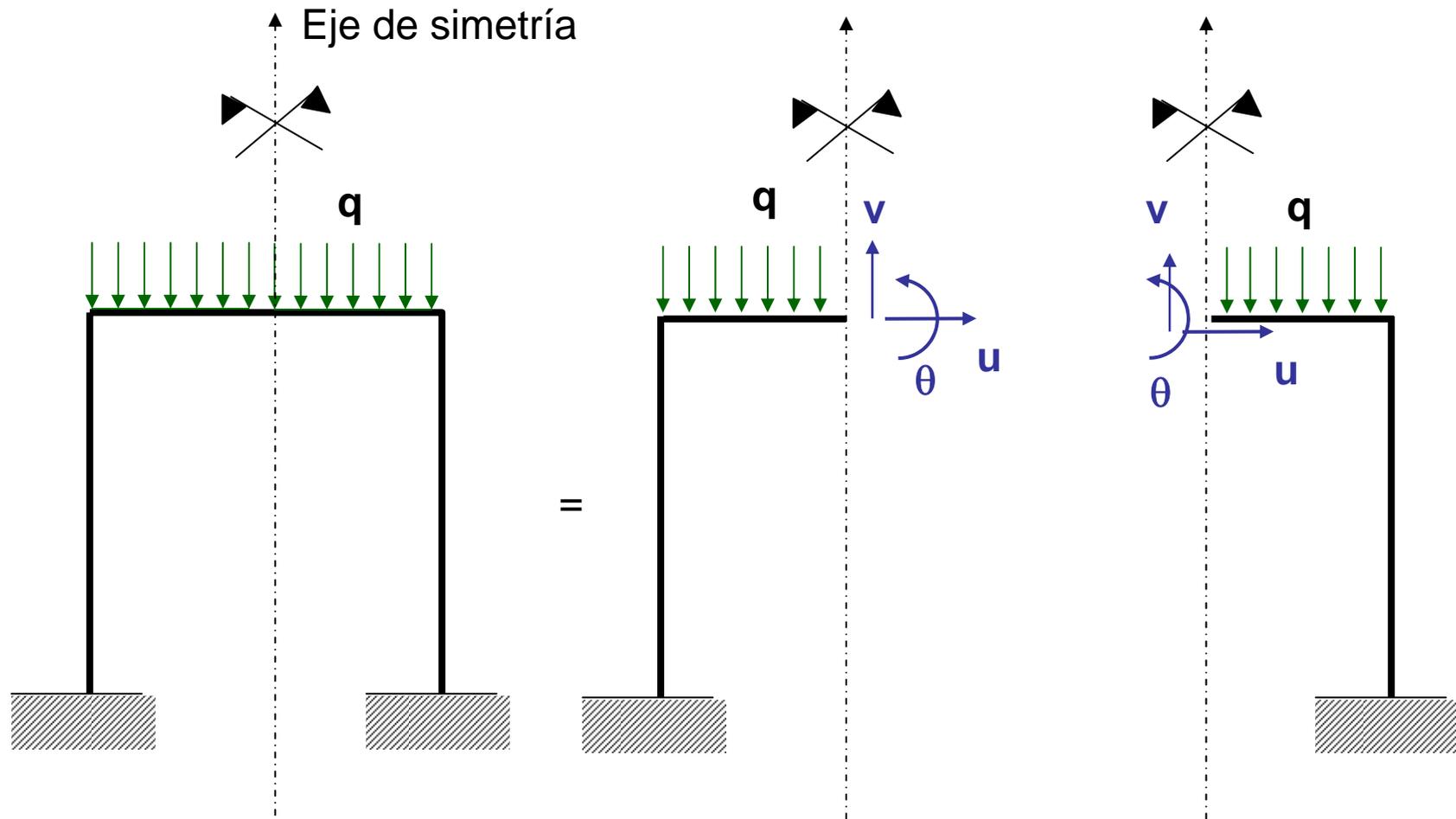


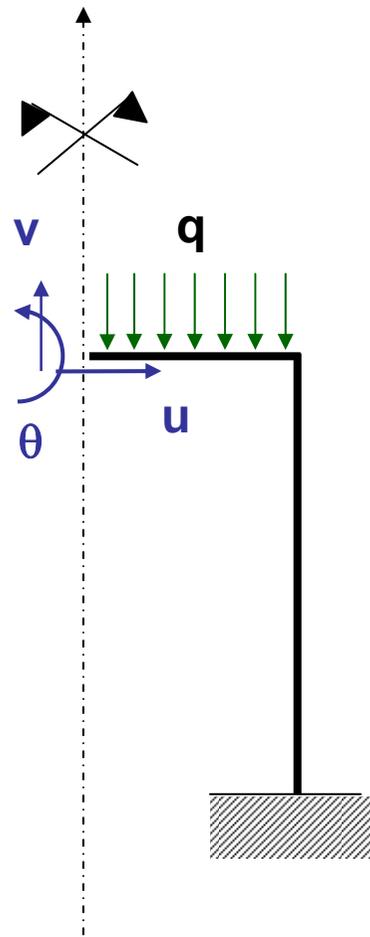
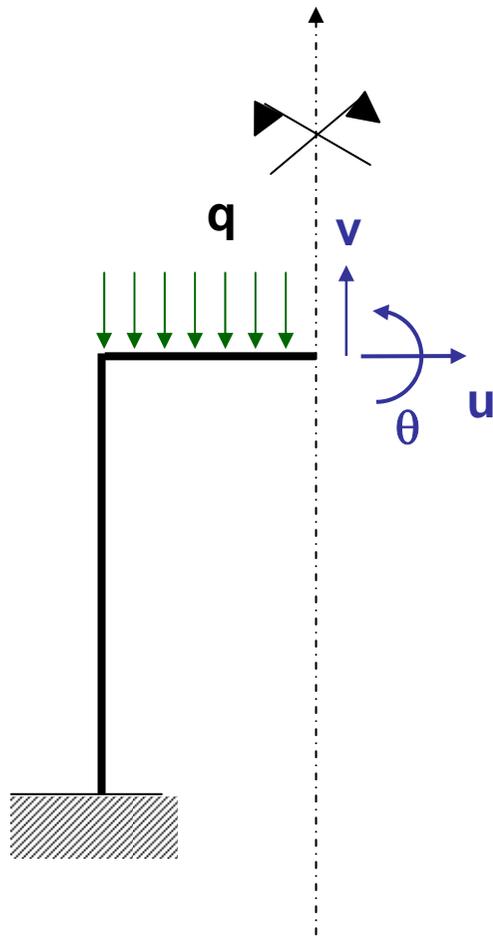
Parte izquierda

Parte derecha girada 180°
alrededor de la barra vertical

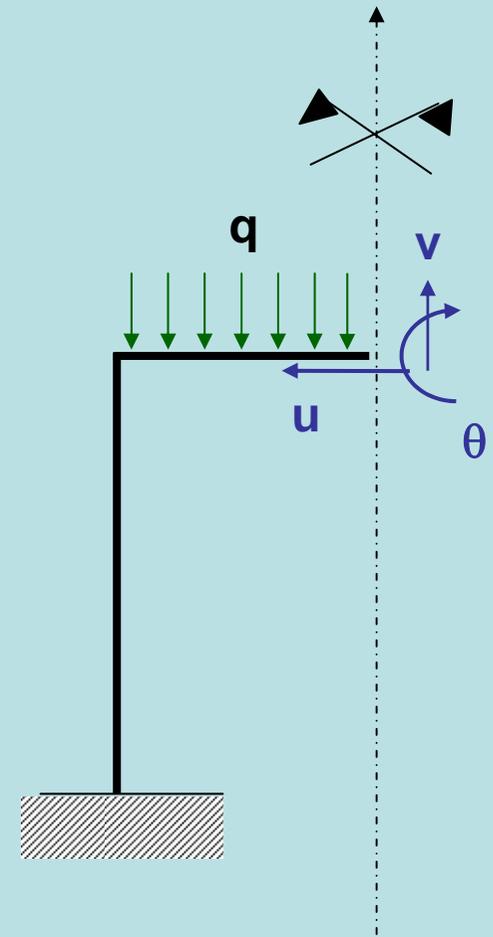


ESTUDIO DE MOVIMIENTOS

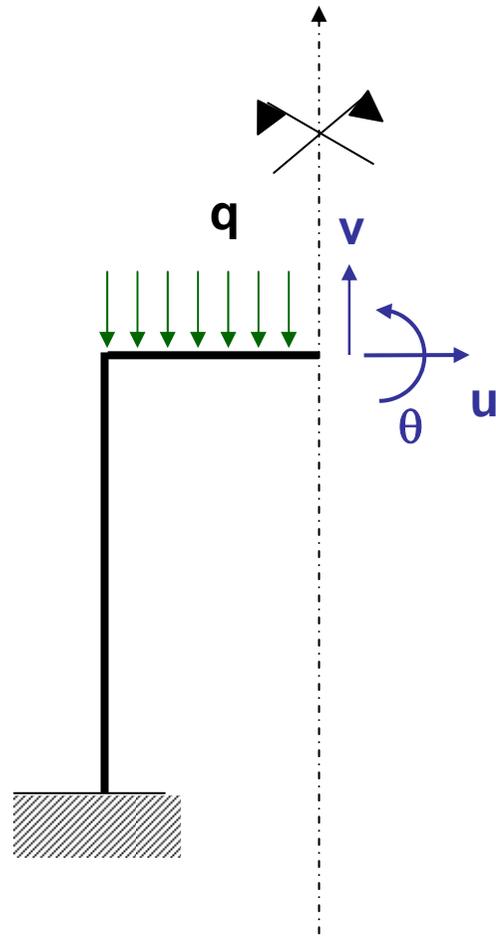




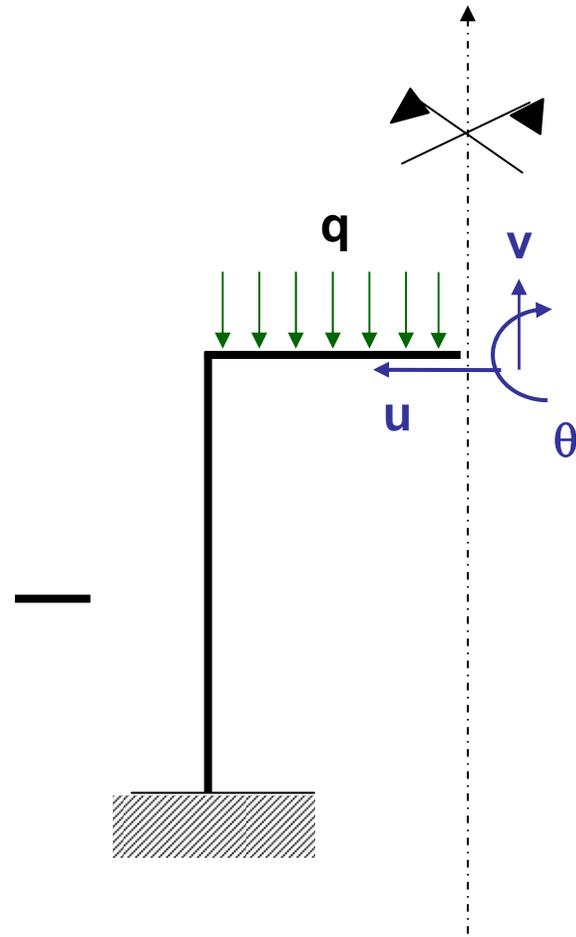
Parte derecha girada 180°
alrededor de la barra vertical



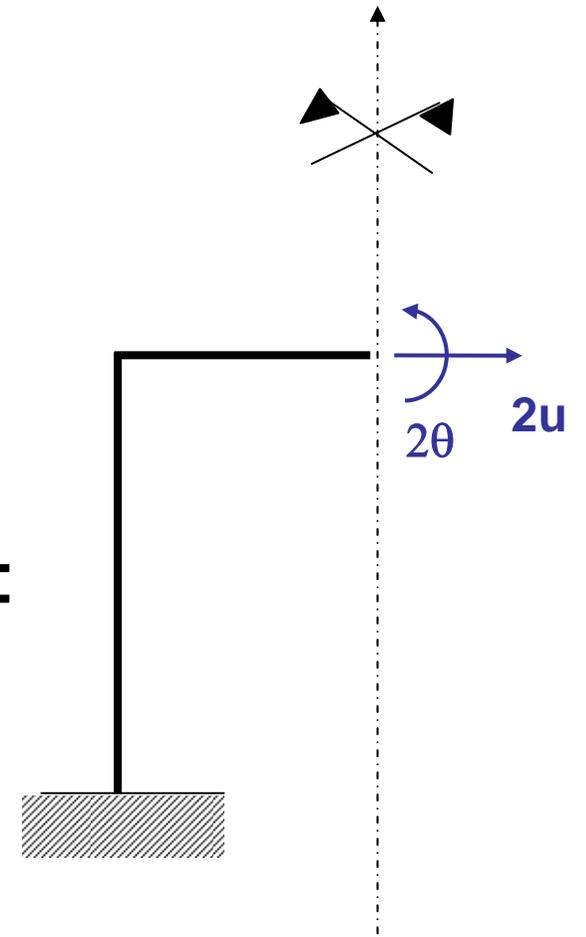
Parte izquierda

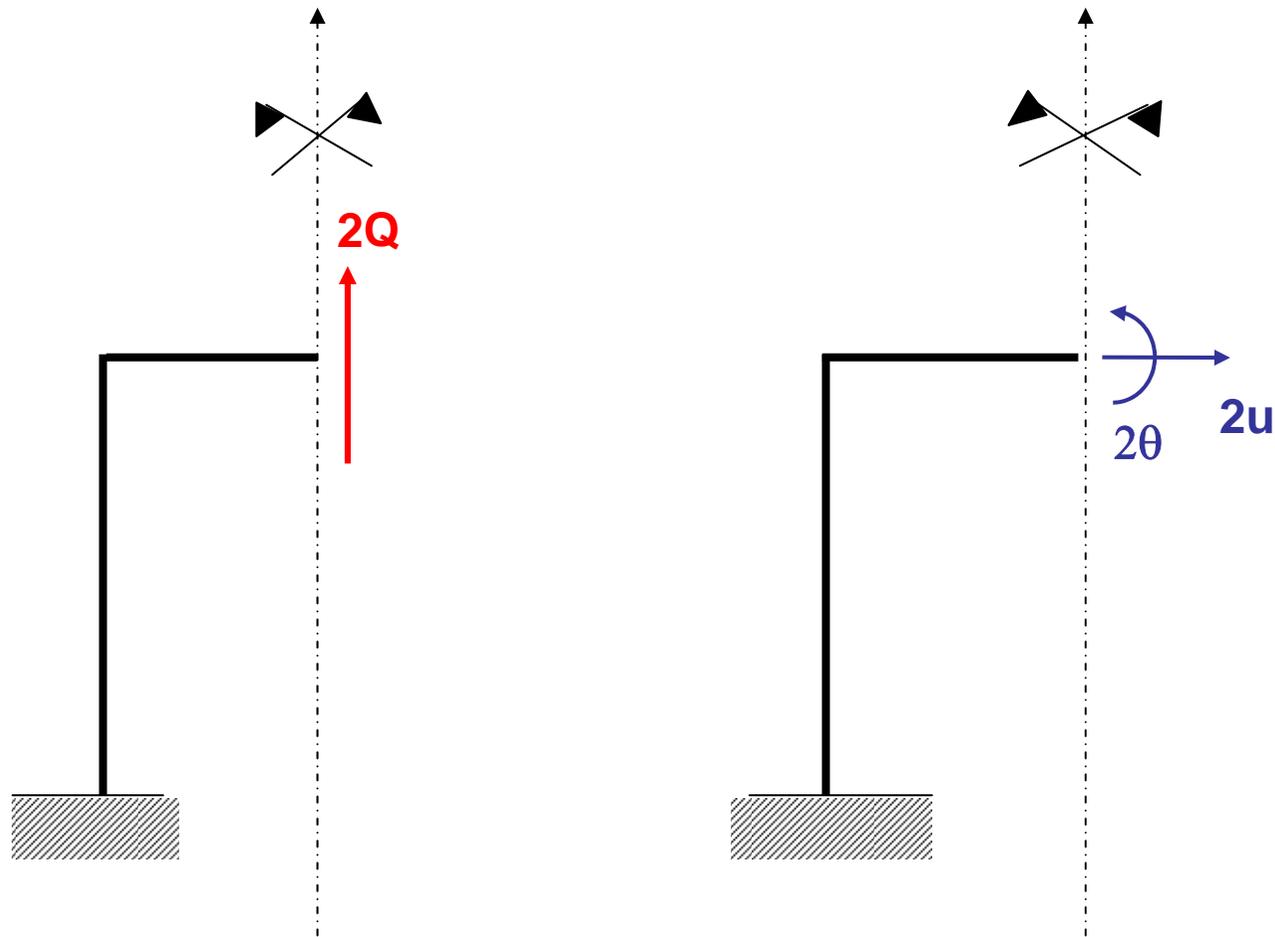


Parte derecha girada 180°
alrededor de la barra vertical



=





Hemos llegado a una estructura en ménsula, sometida a una carga $2Q$ que no sufre ningún desplazamiento vertical, por lo que:

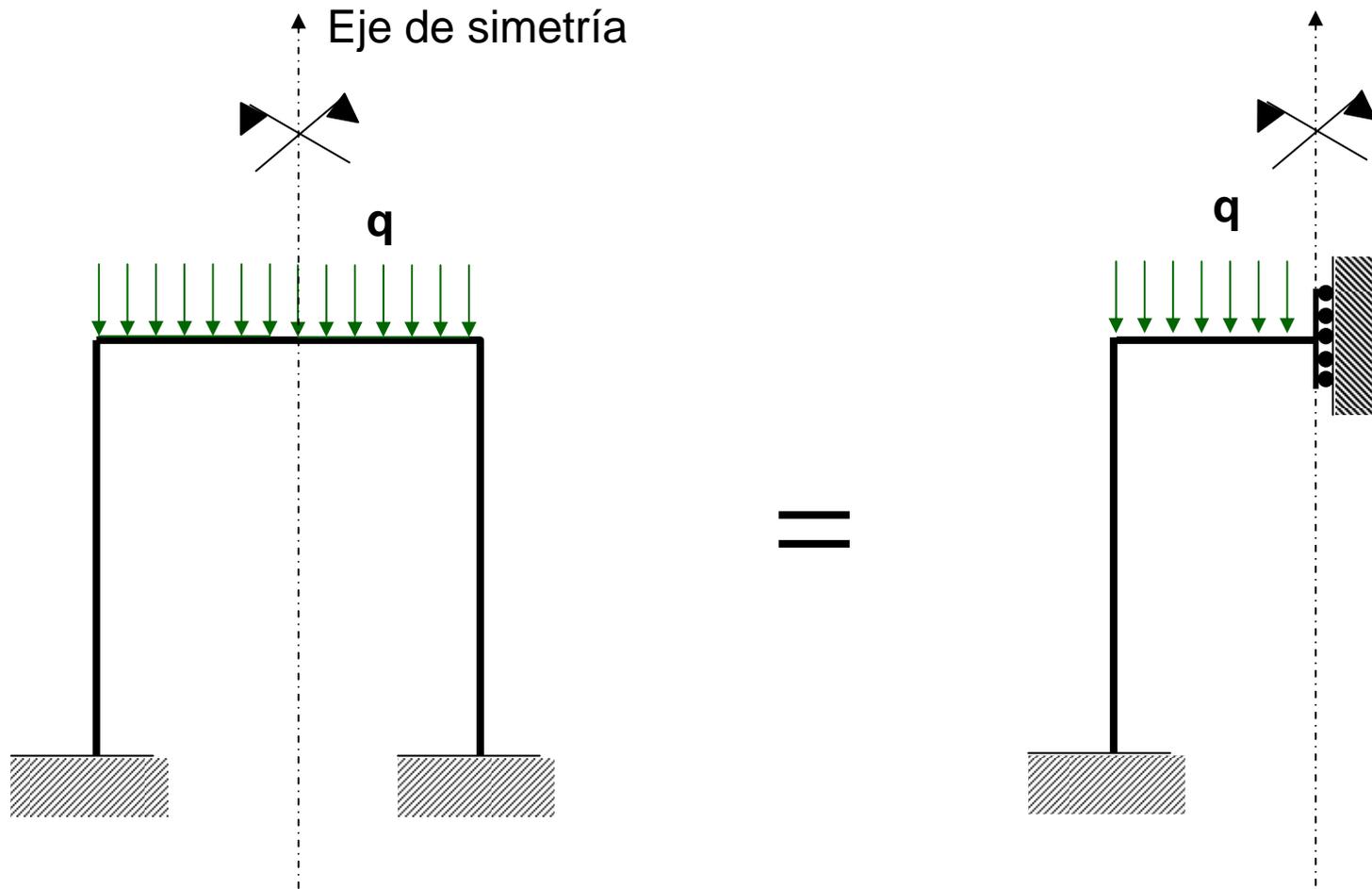
$$Q=0$$

$$u=0$$

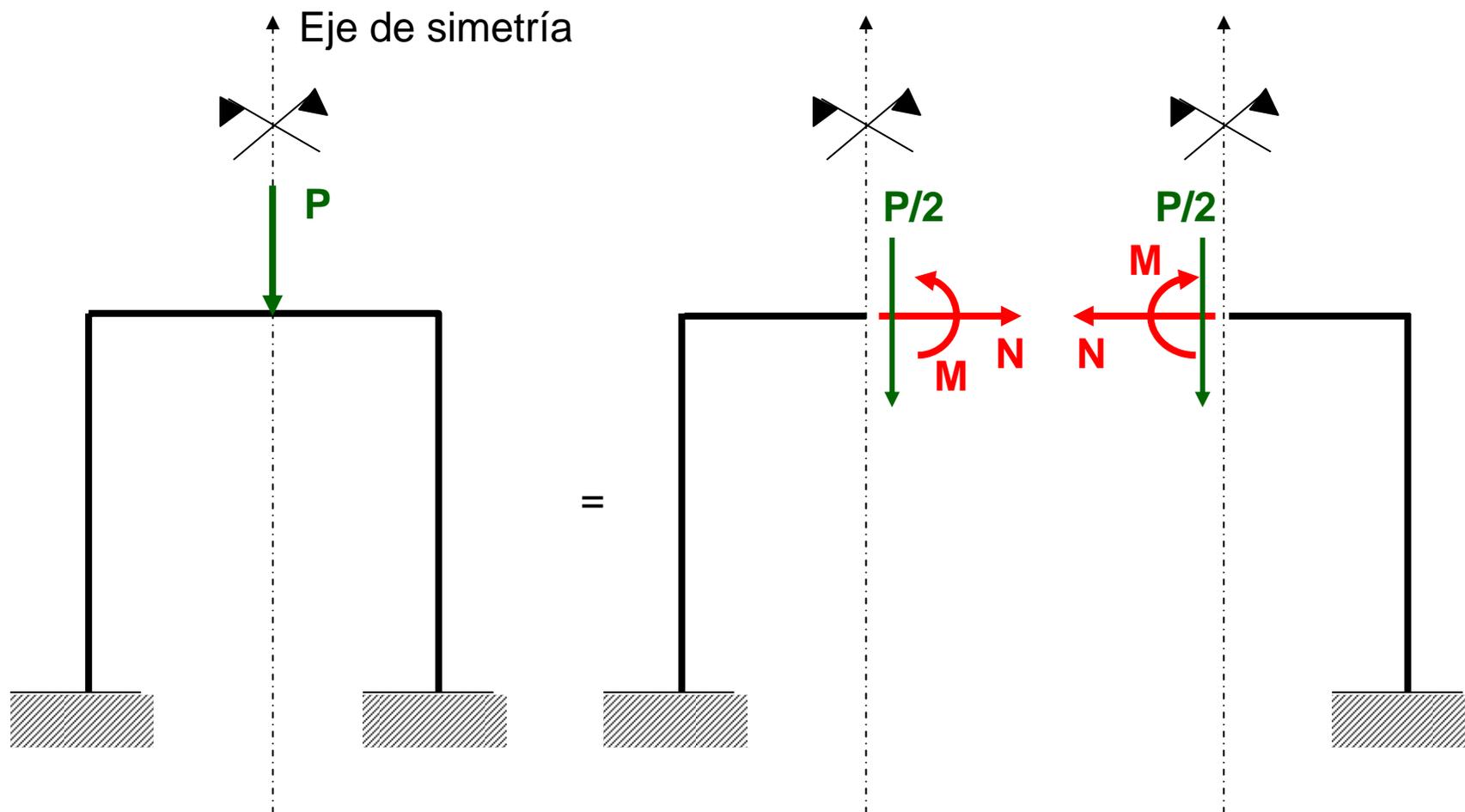
$$\theta=0$$

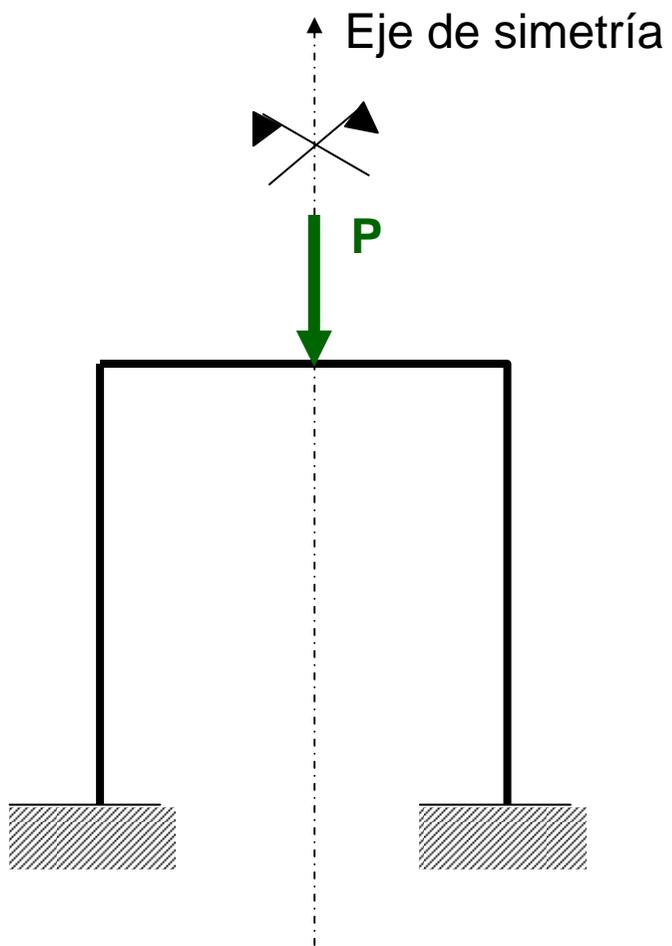
La sección de corte de la estructura con el eje de simetría no sufre esfuerzo cortante y sus desplazamientos horizontal y giro son nulos.

¿Cómo se puede simplificar estructuralmente una estructura simétrica de forma y de cargas?

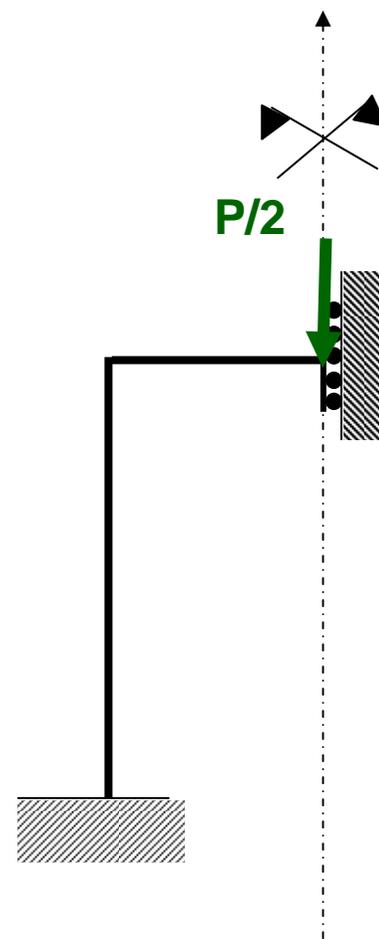


¿Es siempre nulo el esfuerzo cortante en la sección de corte con el eje de simetría?

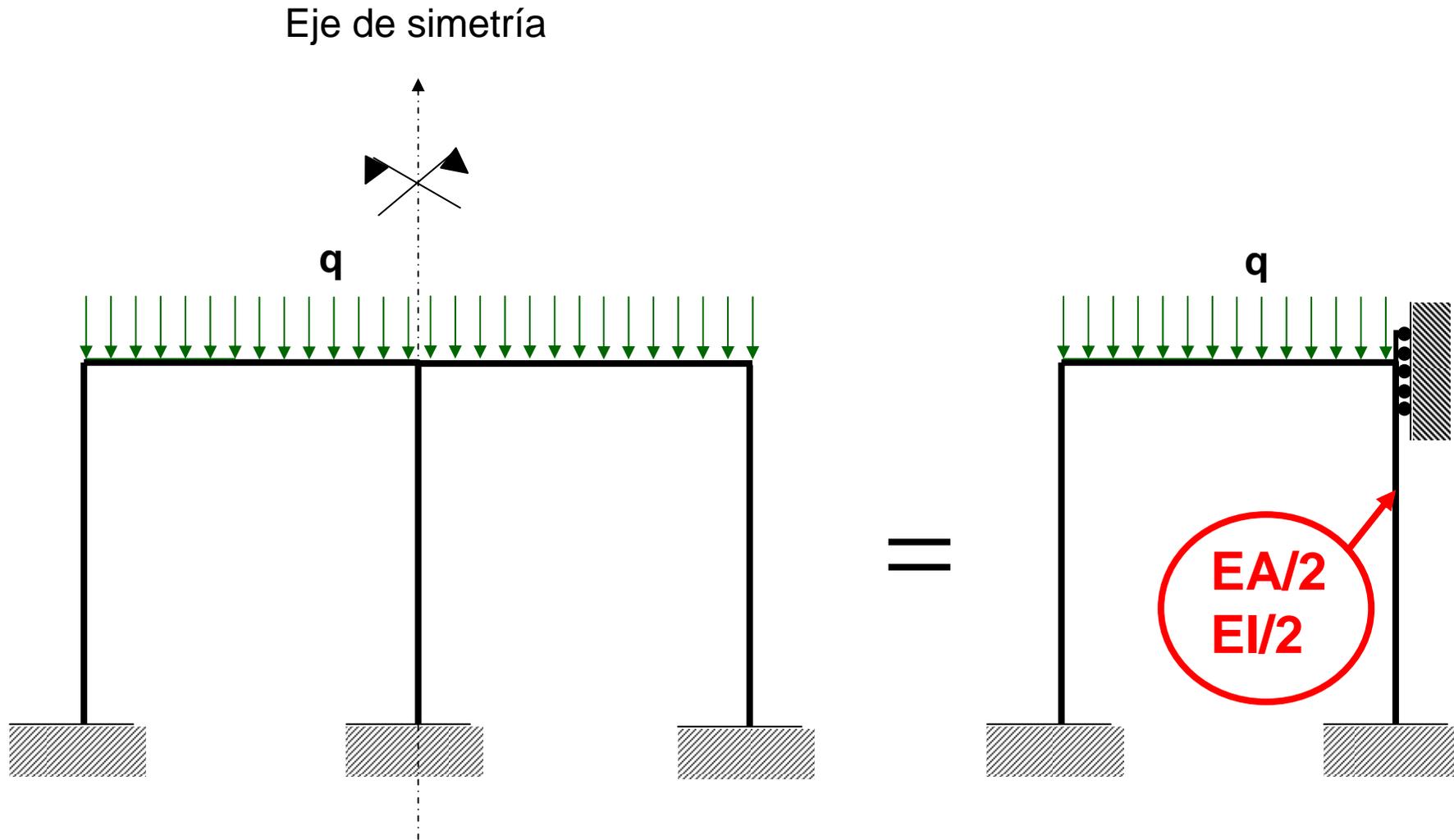




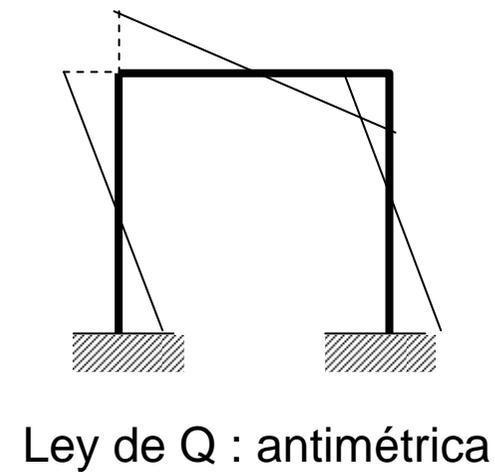
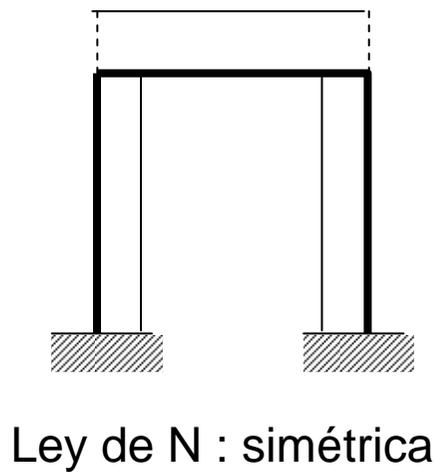
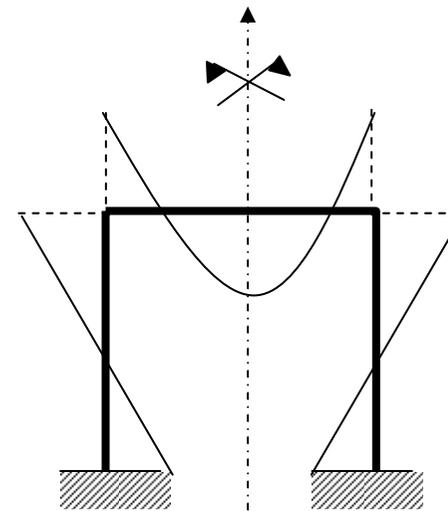
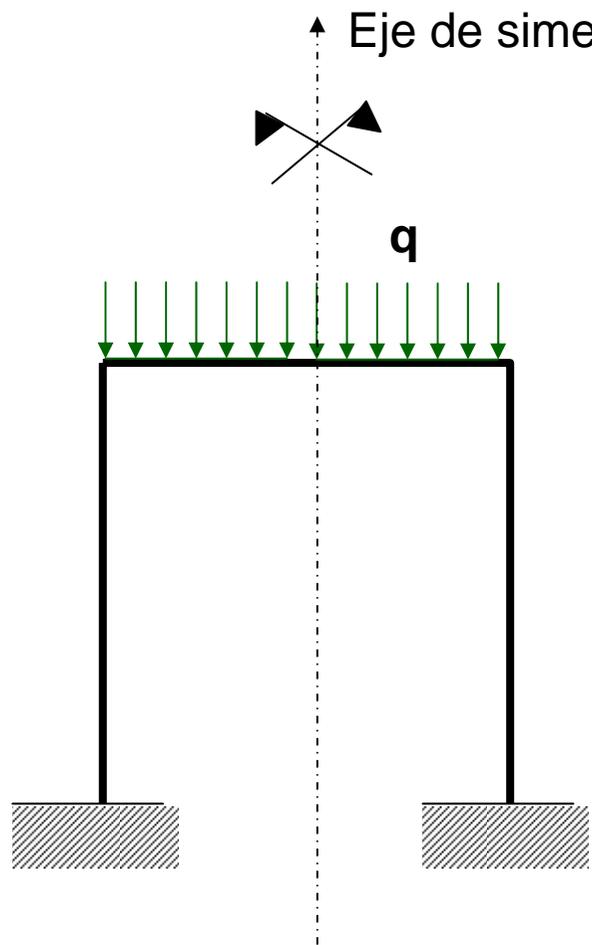
=



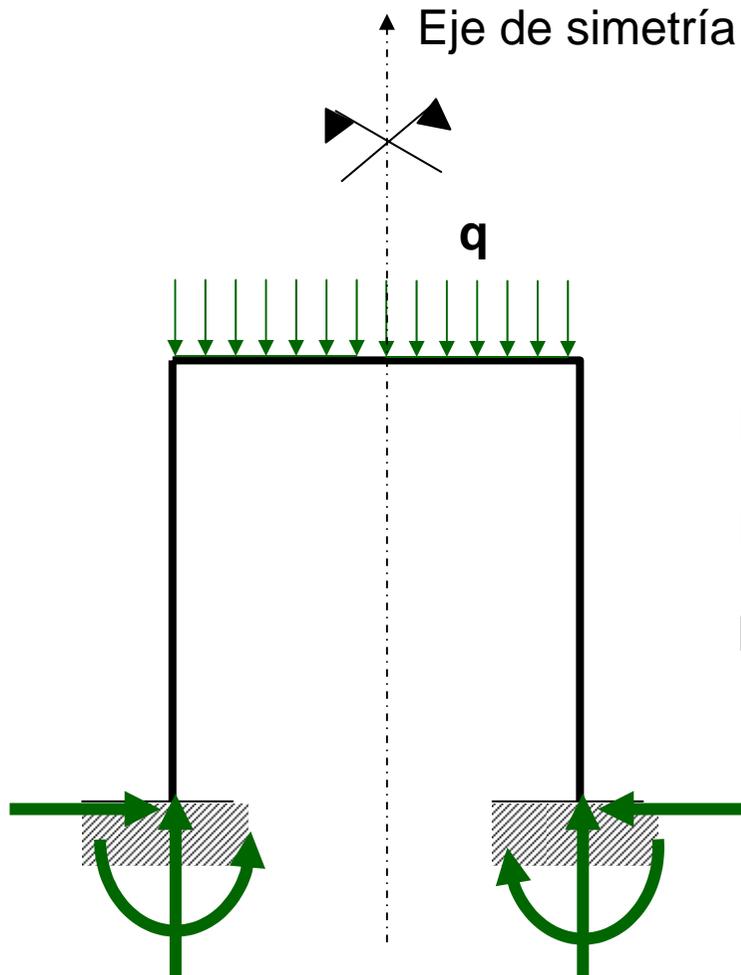
¿Qué ocurre si existe una barra coincidente con el eje de simetría?



¿Qué ocurre con las leyes de esfuerzos?



¿Qué ocurre con las reacciones?

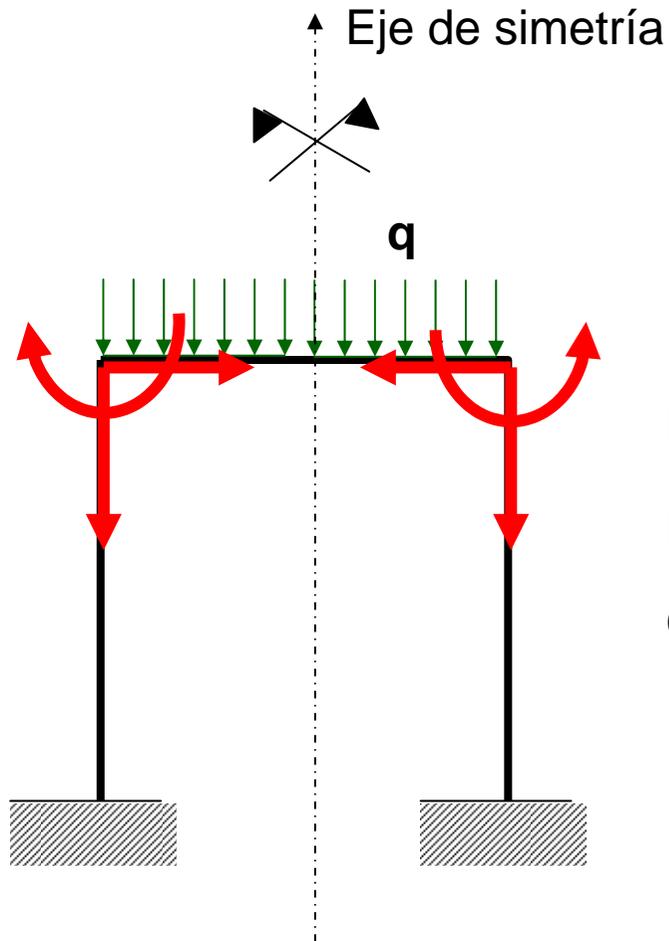


Reacciones horizontales: iguales y opuestas

Reacciones verticales: iguales

Momentos: iguales y opuestos

¿Qué ocurre con los movimientos?

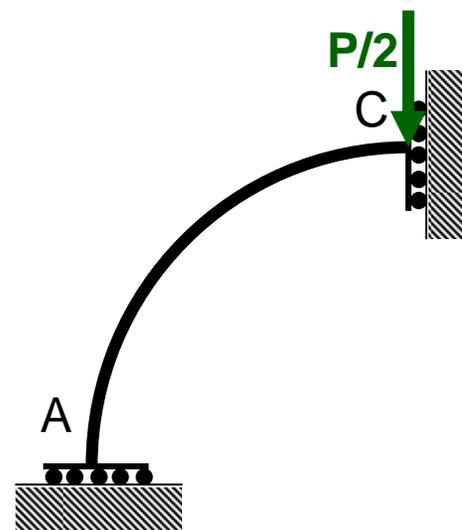
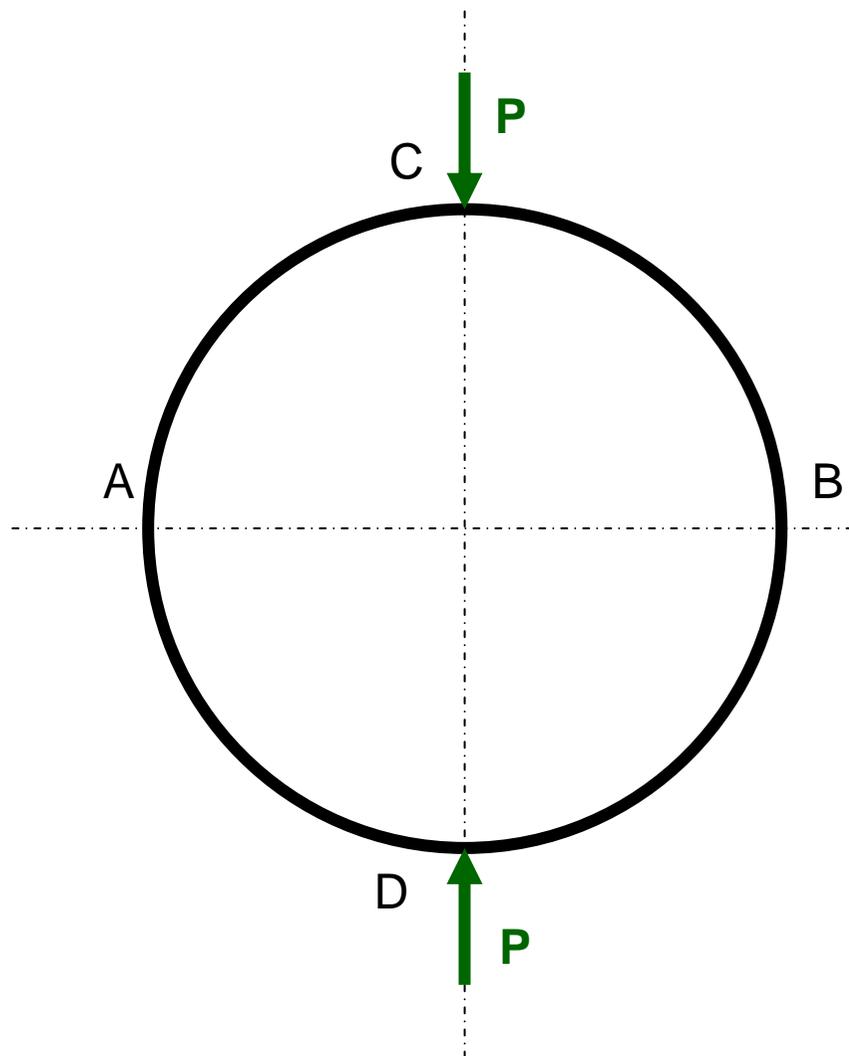


Desplazamientos horizontales: iguales y opuestos

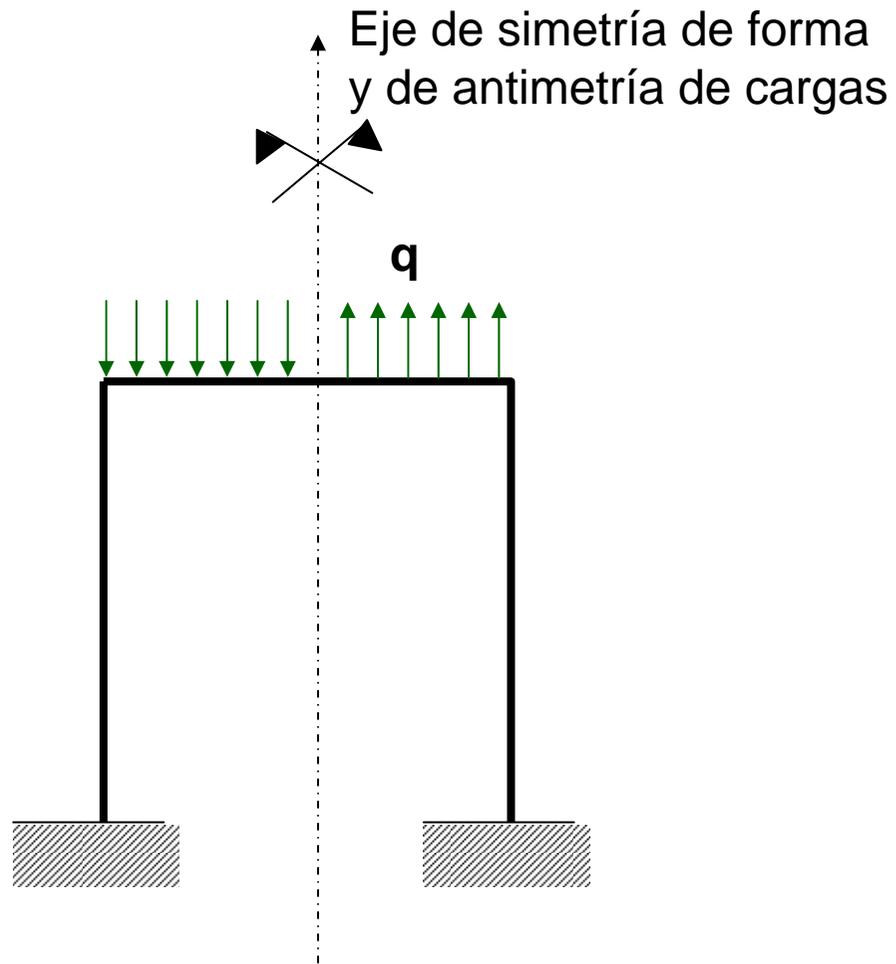
Desplazamientos verticales: iguales

Giros: iguales y opuestos

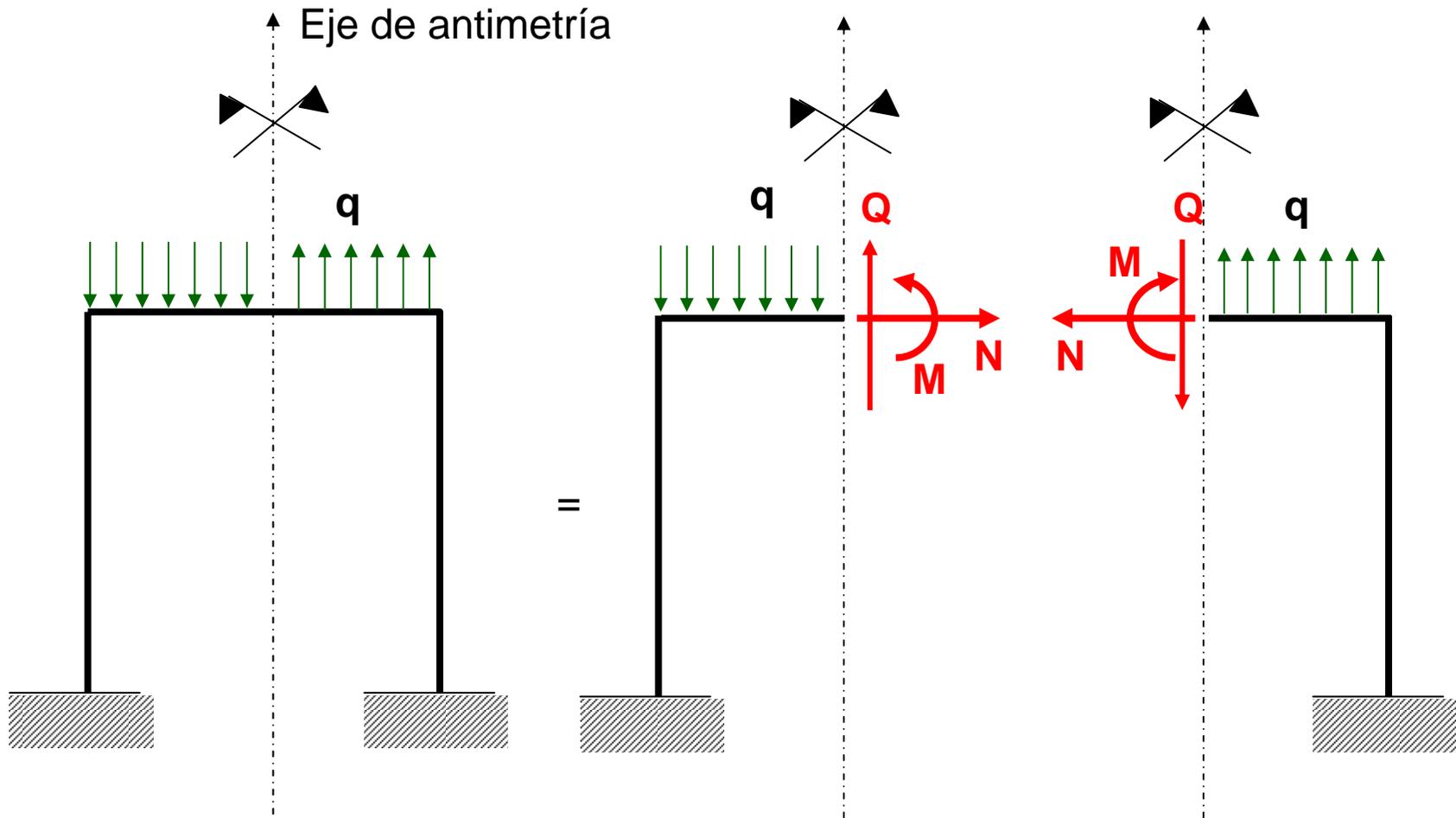
Estructura con dos ejes de simetría

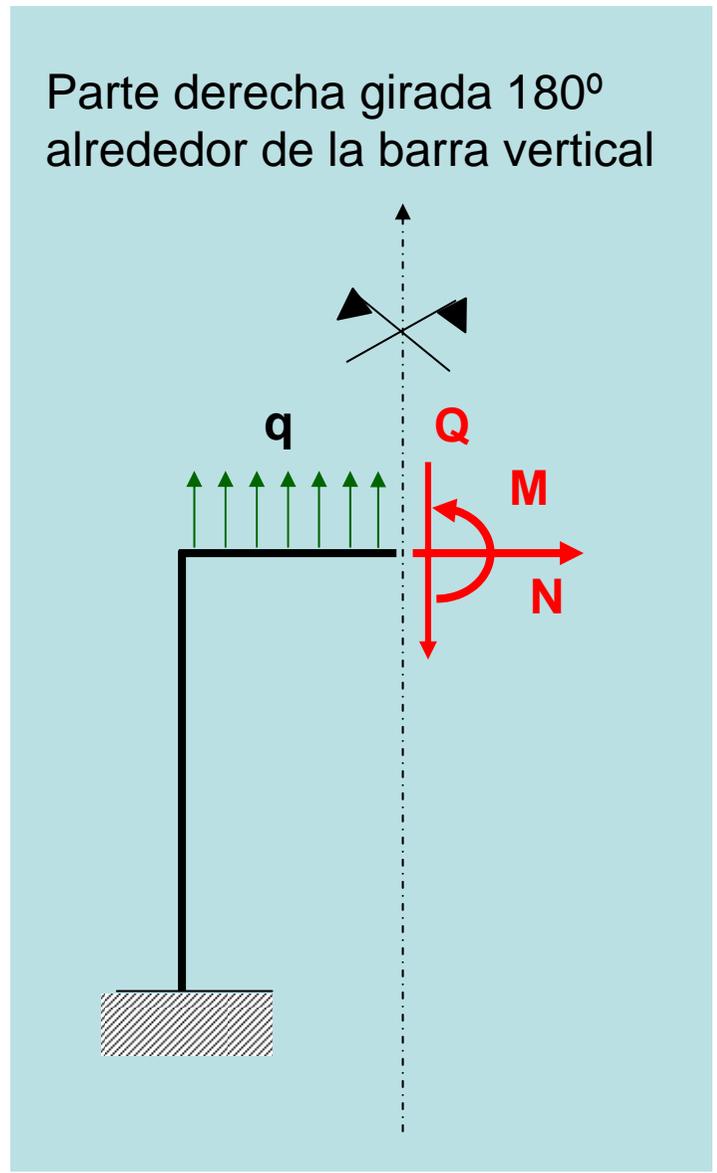
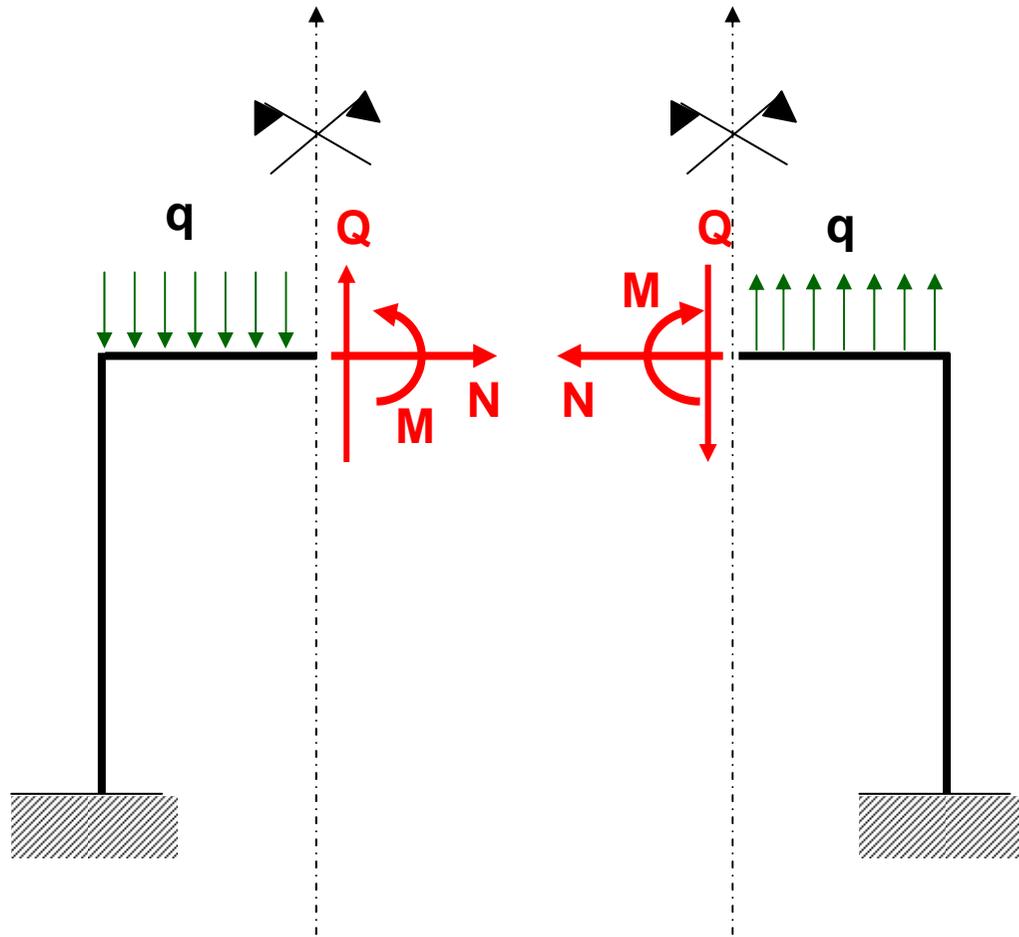


CASO 2: ESTRUCTURA SIMÉTRICA RESPECTO DE UN EJE CON ANTIMETRÍA DE CARGAS RESPECTO DE ESE EJE



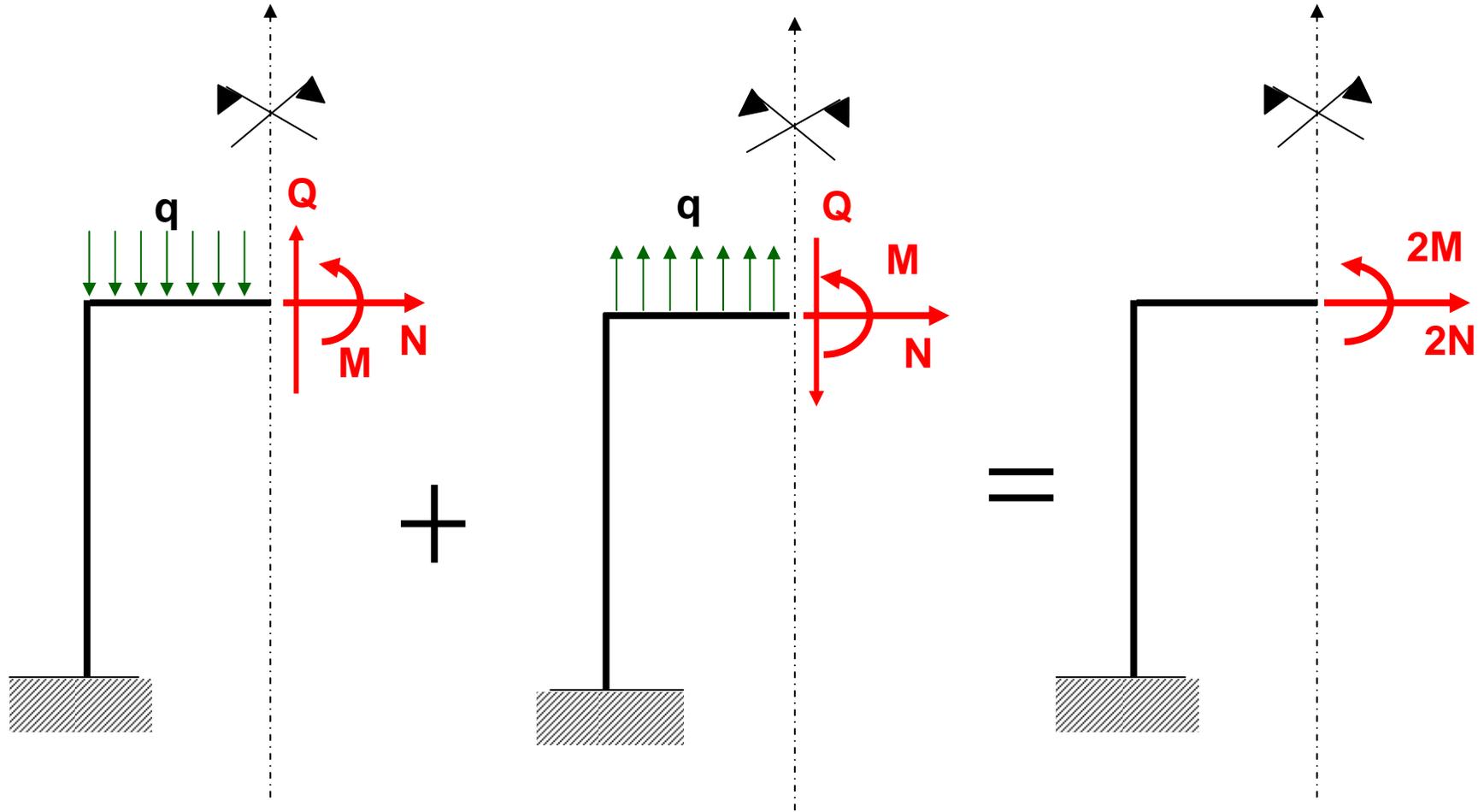
ESTUDIO DE ESFUERZOS



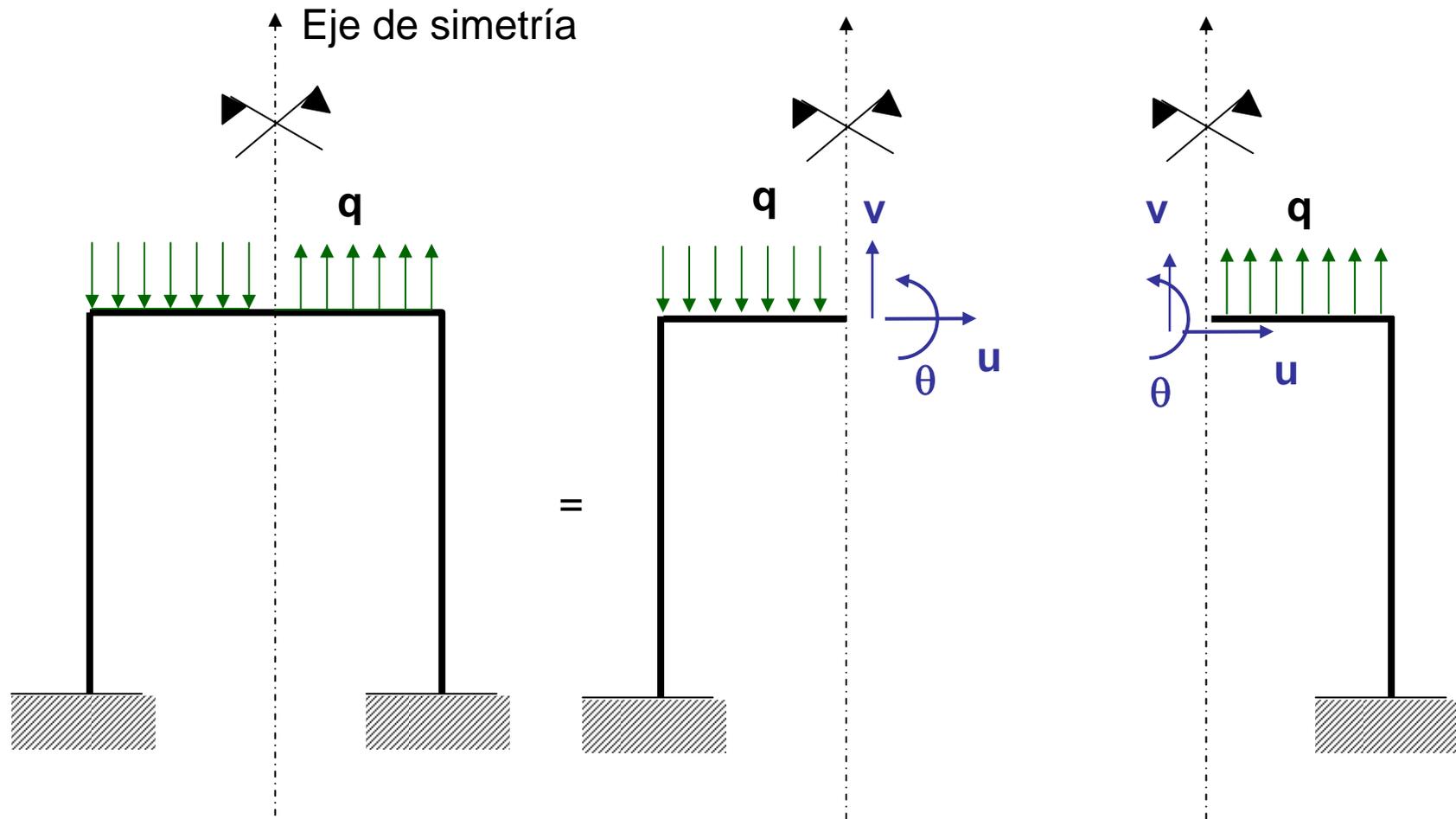


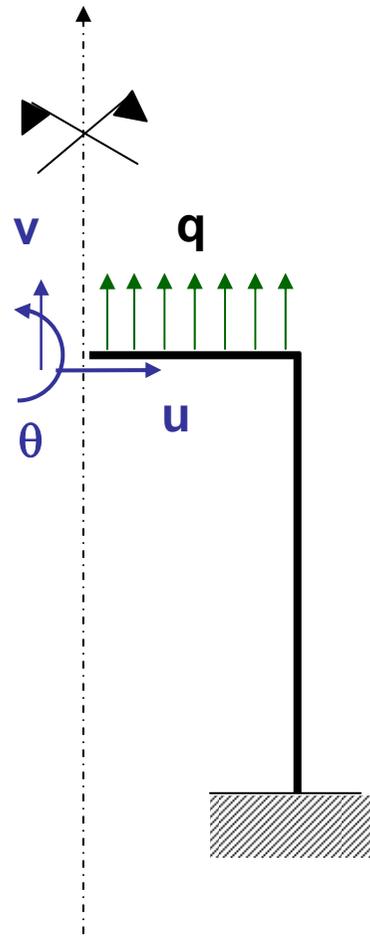
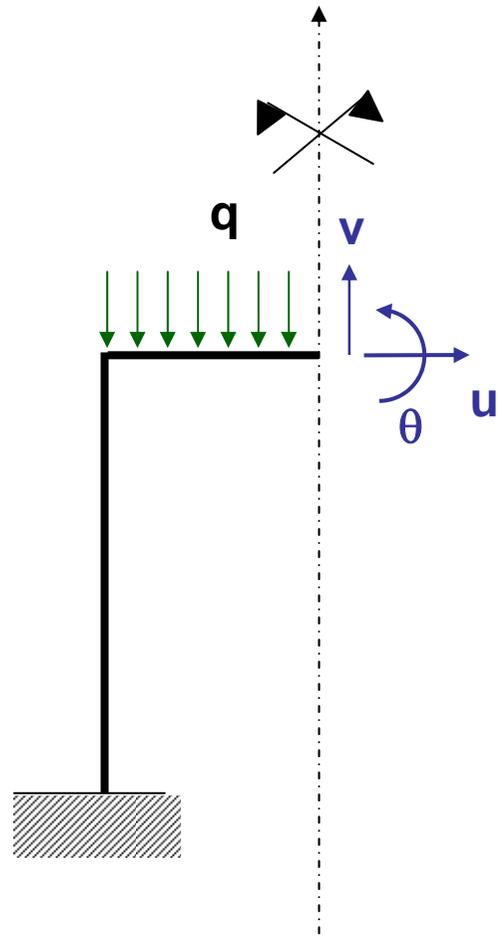
Parte izquierda

Parte derecha girada 180°
alrededor de la barra vertical

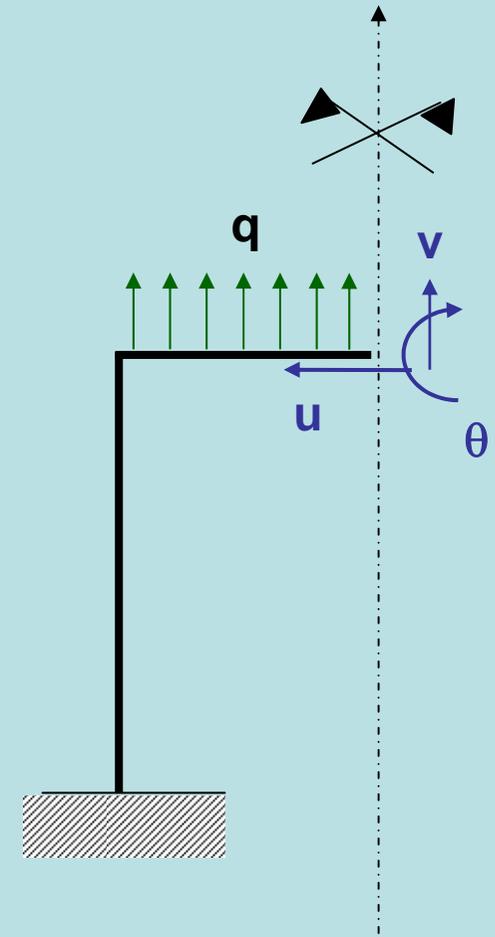


ESTUDIO DE MOVIMIENTOS

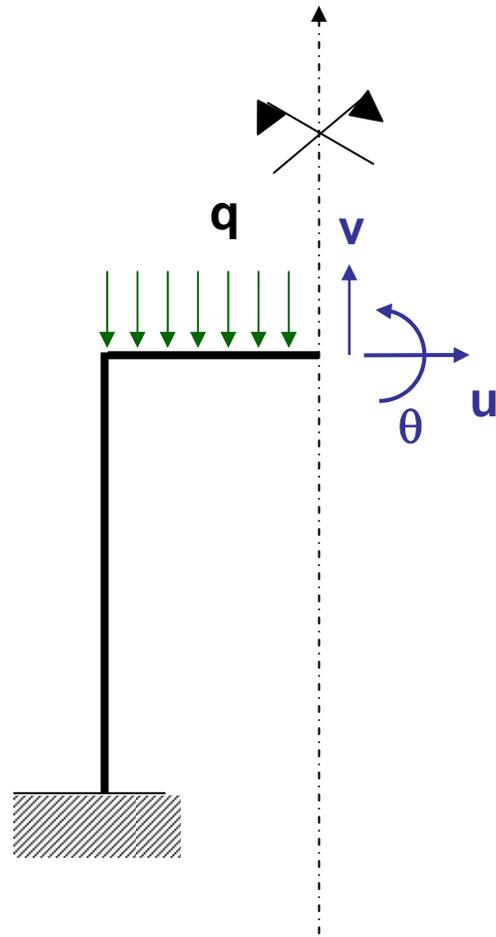




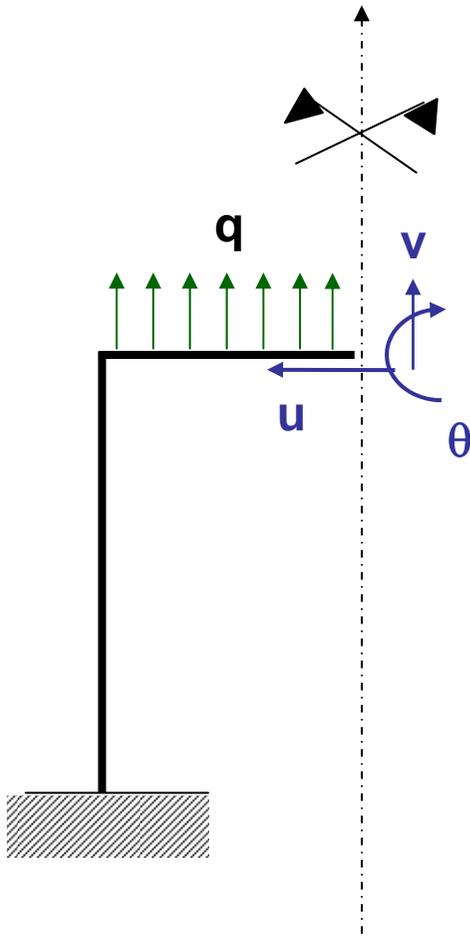
Parte derecha girada 180°
alrededor de la barra vertical



Parte izquierda

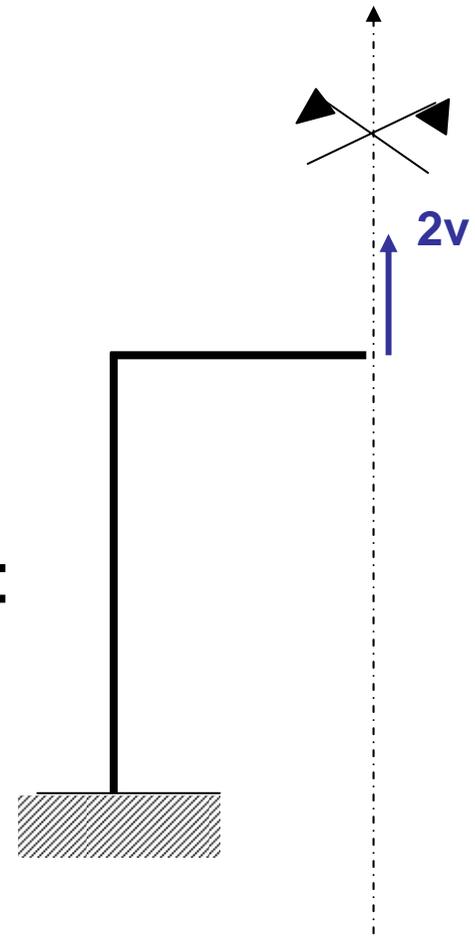


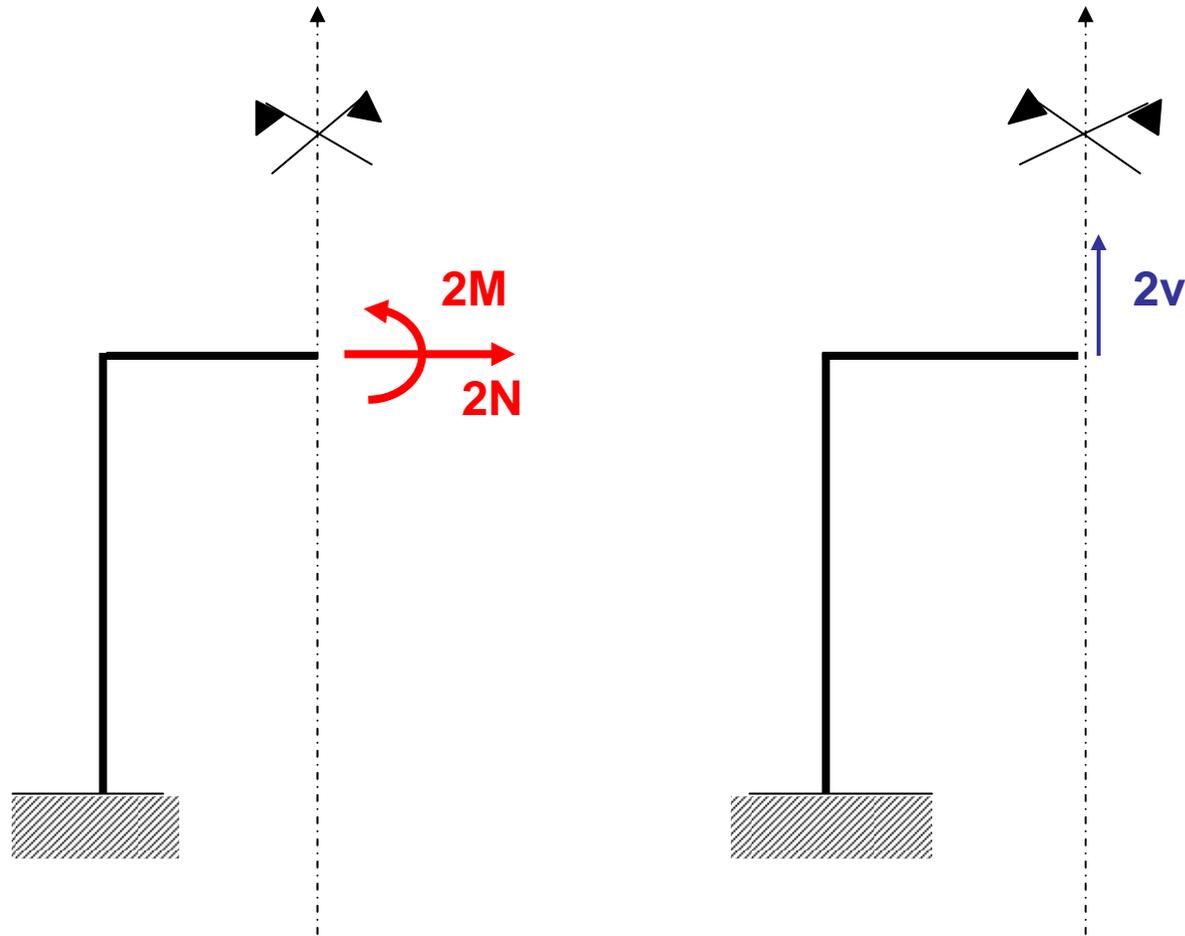
Parte derecha girada 180°
alrededor de la barra vertical



+

=





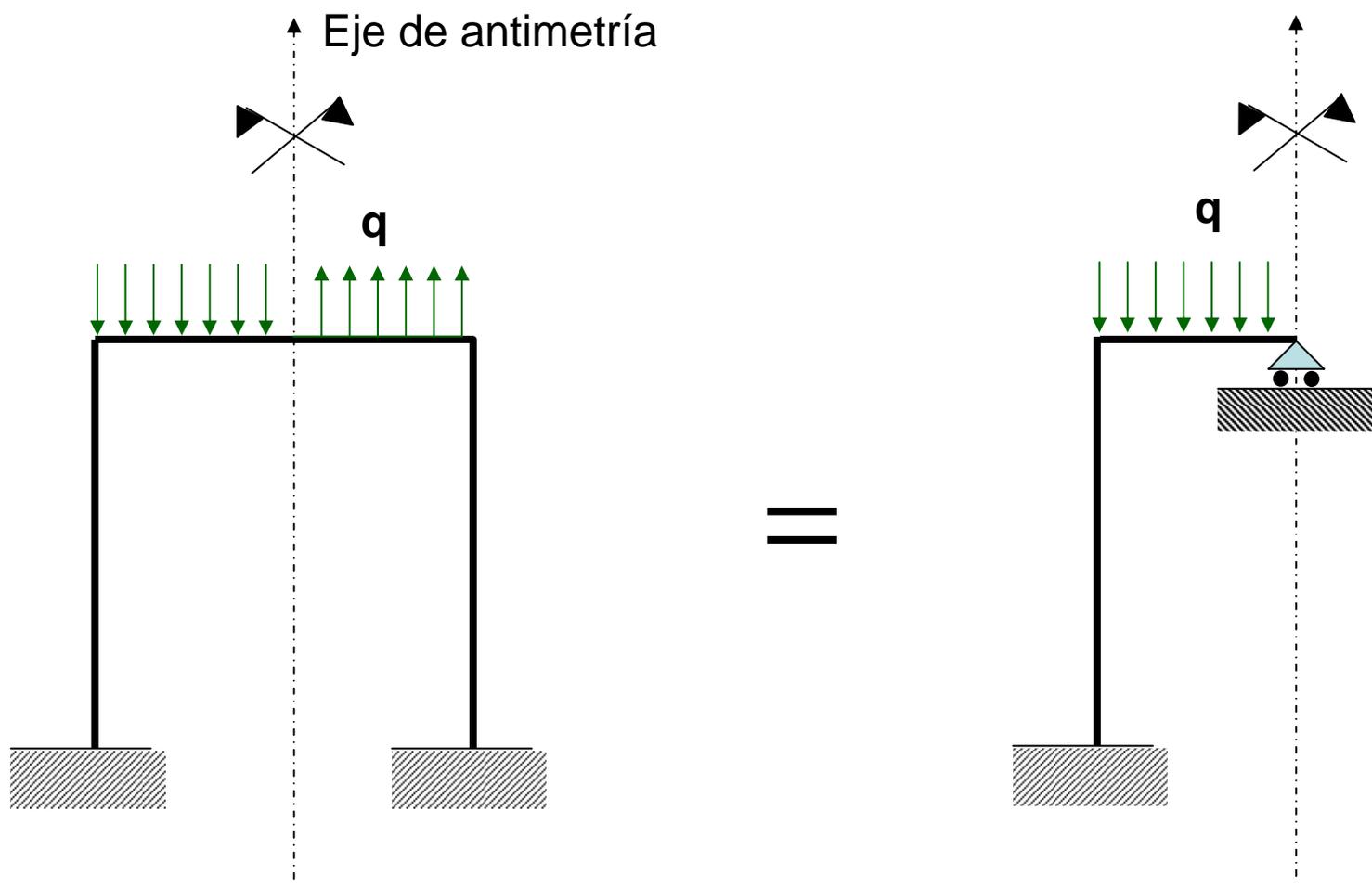
Hemos llegado a una estructura en ménsula, sometida a una carga horizontal de $2N$ y a un momento $2M$ que no sufre ningún desplazamiento horizontal ni giro, por lo que:

$$M=0$$

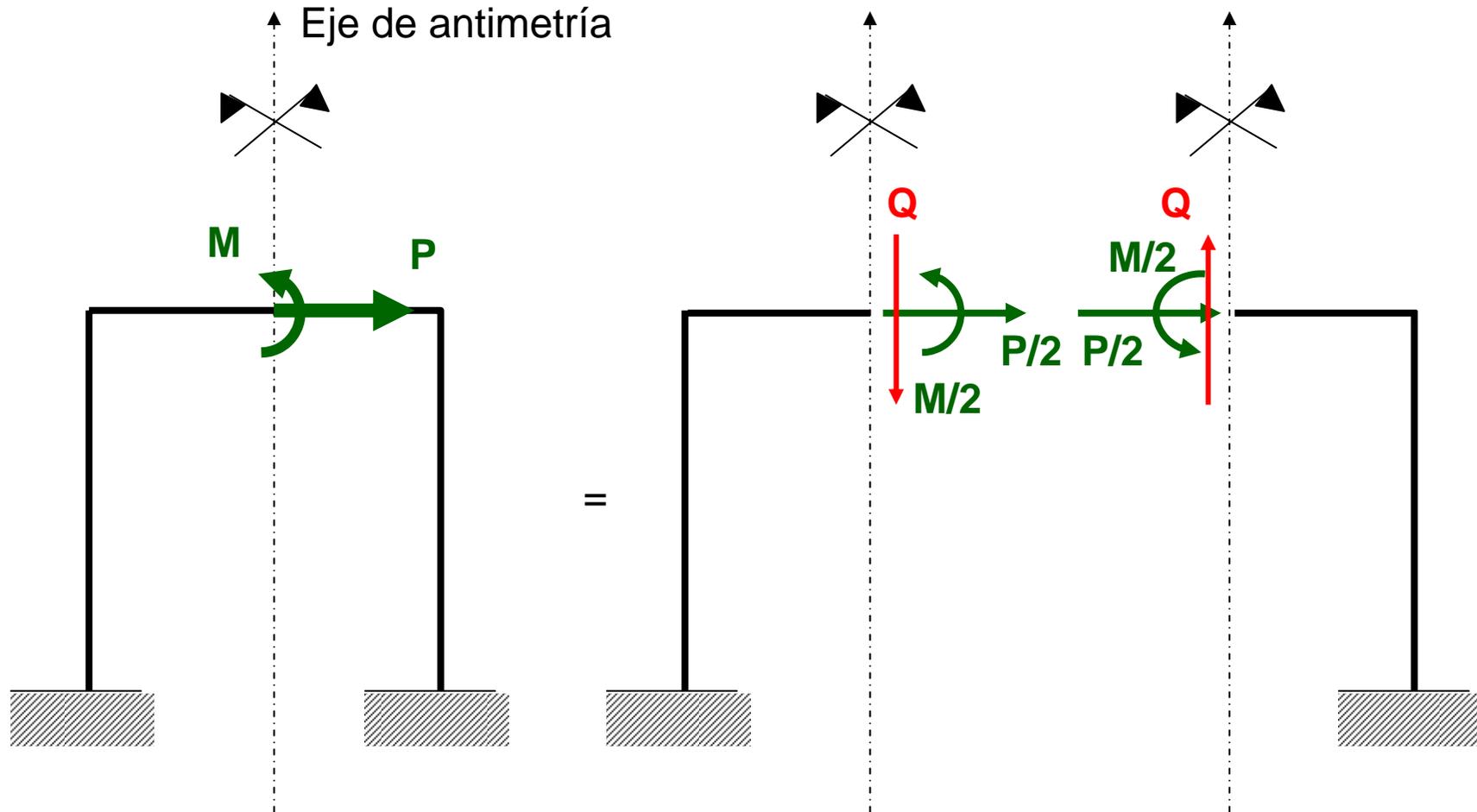
$$N=0$$

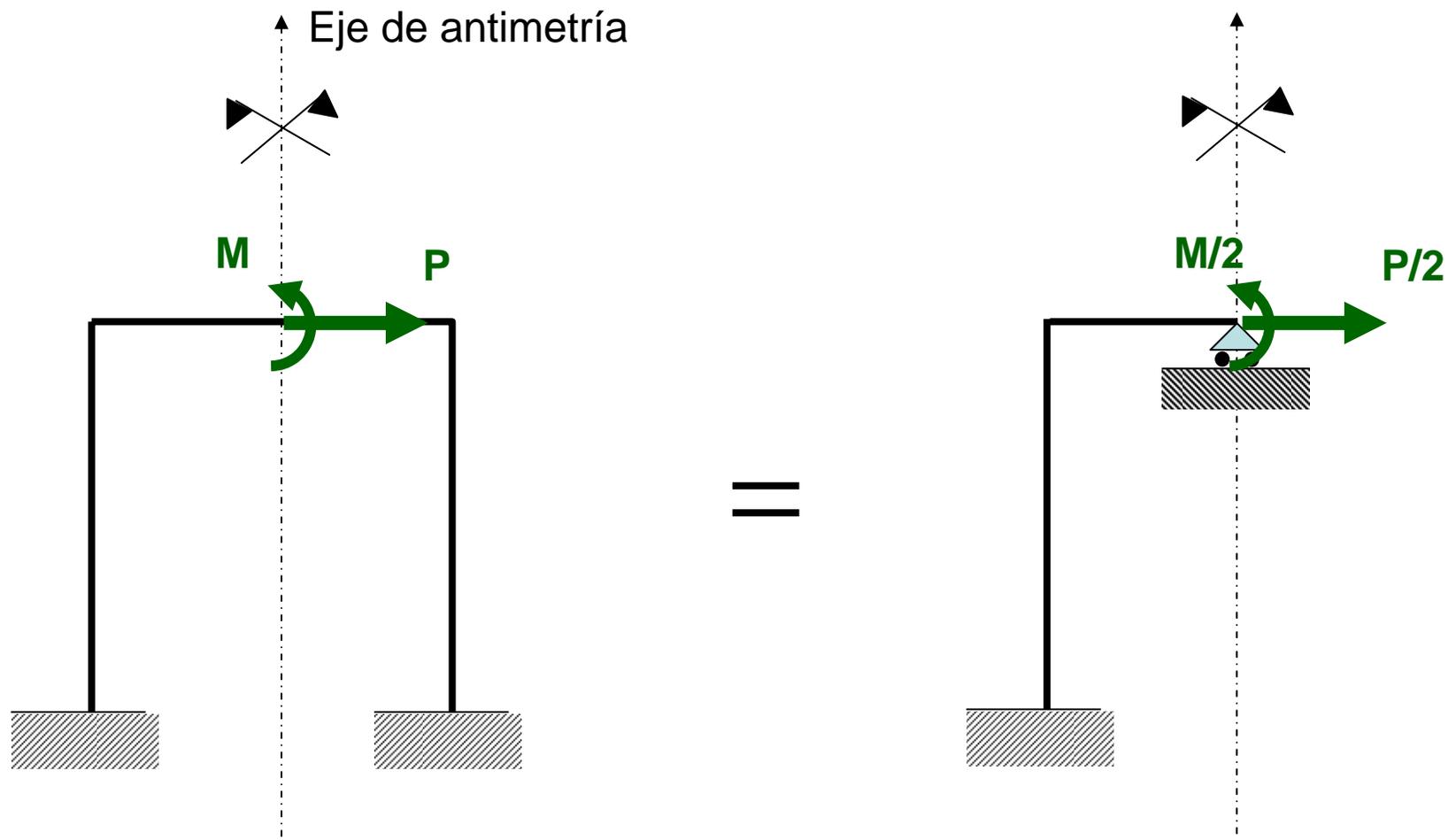
$$v=0$$

La sección de corte de la estructura con el eje de antimetría no sufre esfuerzo axial ni momento flector y su desplazamientos vertical es nulo.

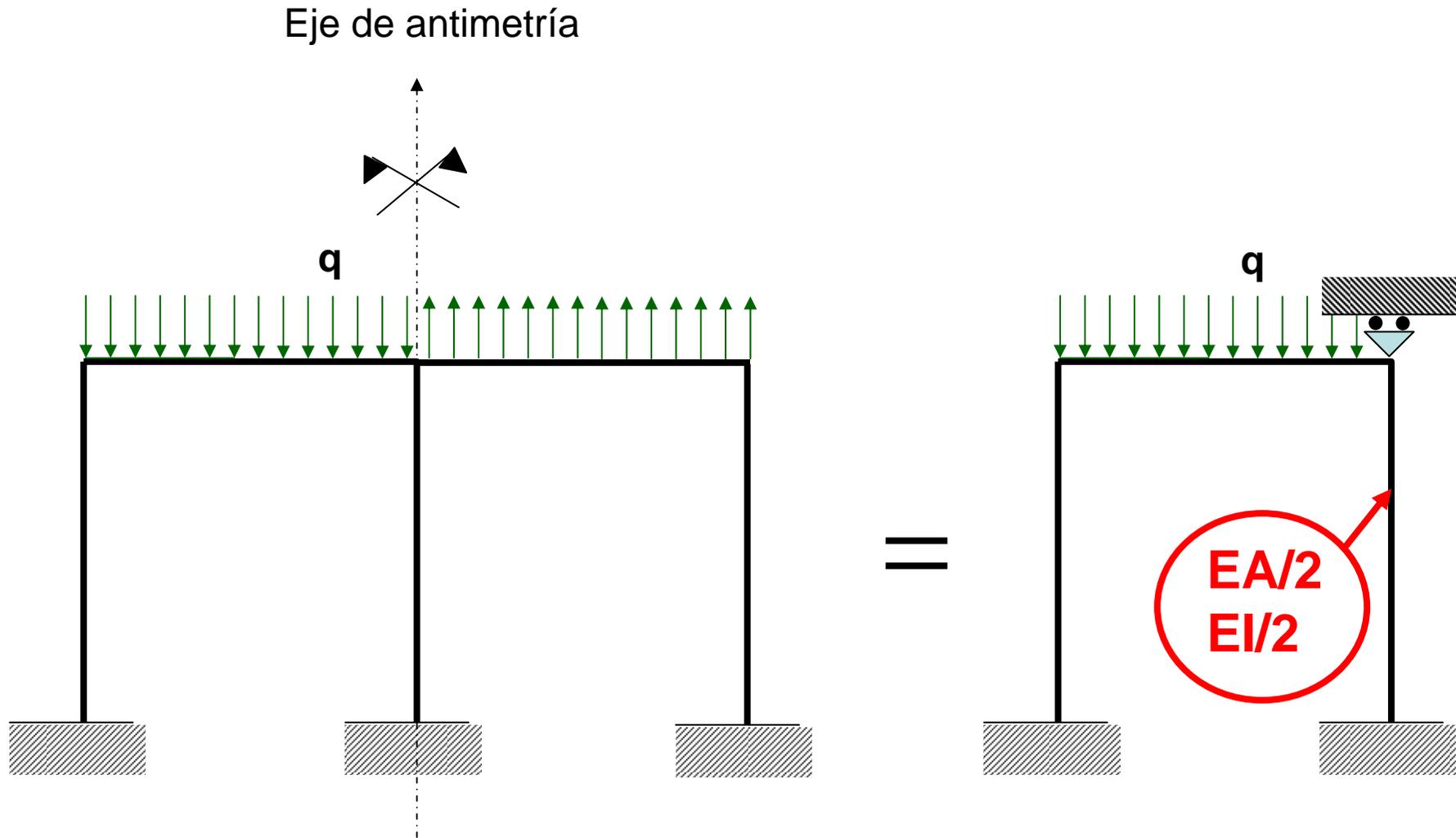


¿Es siempre nulo el esfuerzo axial y el momento flector en la sección de corte con el eje de antimetría?

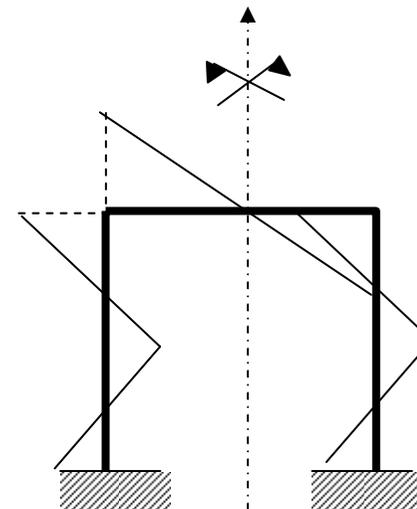
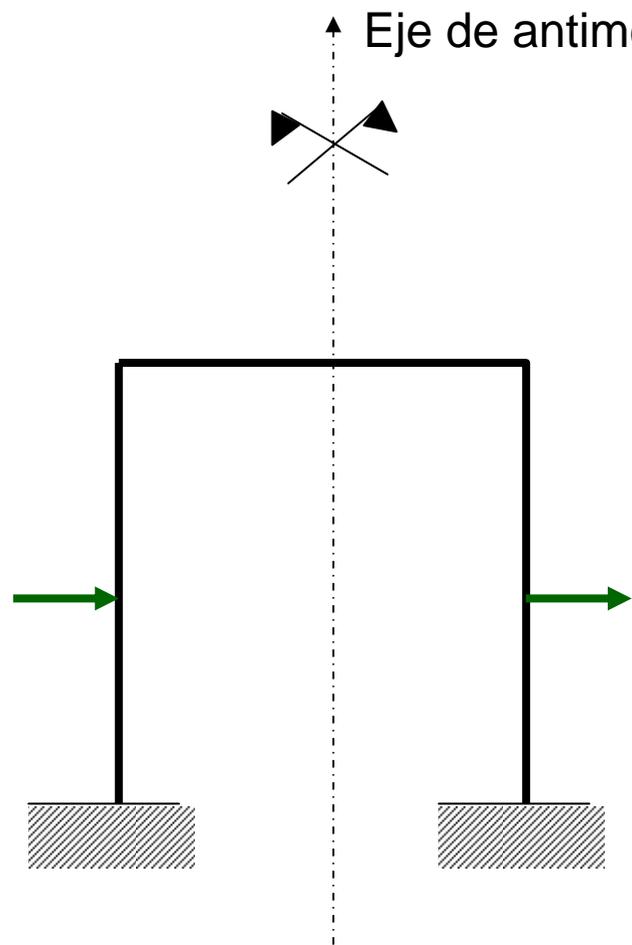




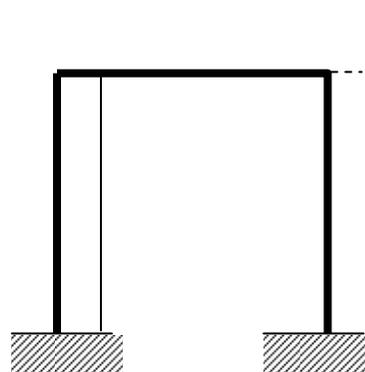
Caso de que exista una barra coincidente con el eje de antimetría



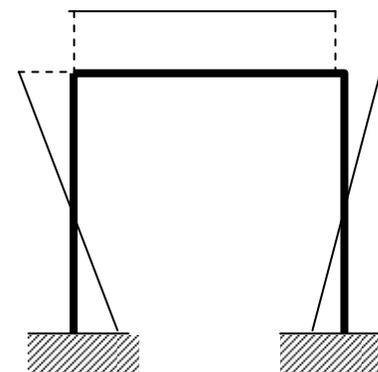
¿Qué ocurre con las leyes de esfuerzos?



Ley de M_f : antimétrica

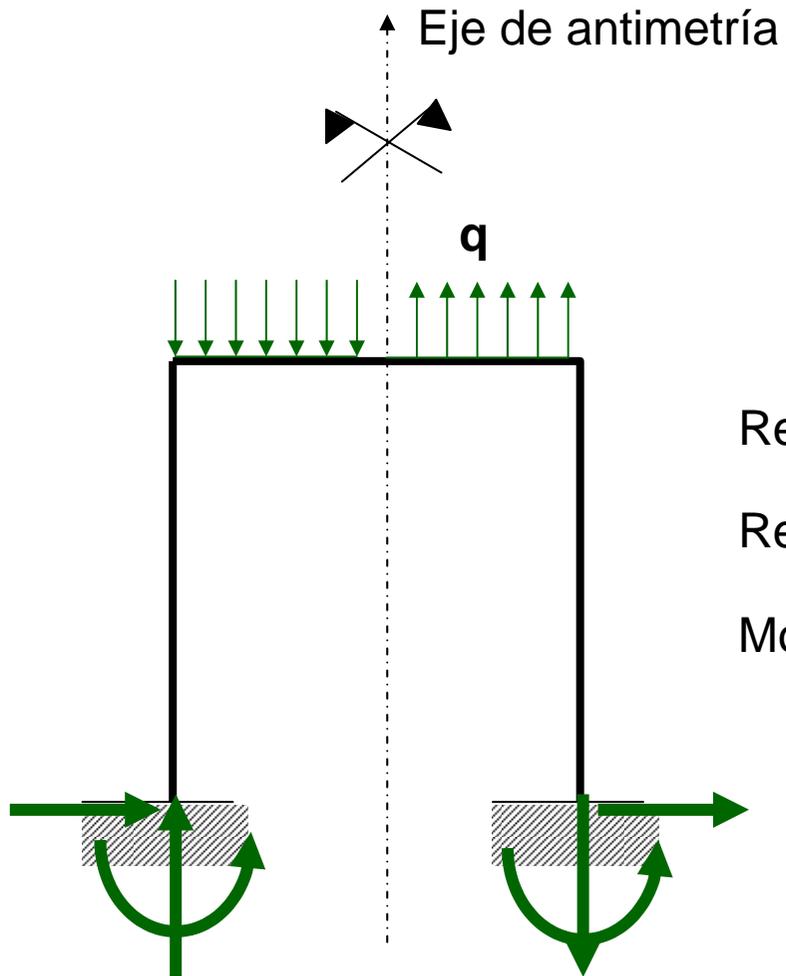


Ley de N : antimétrica



Ley de Q : simétrica

¿Qué ocurre con las reacciones?

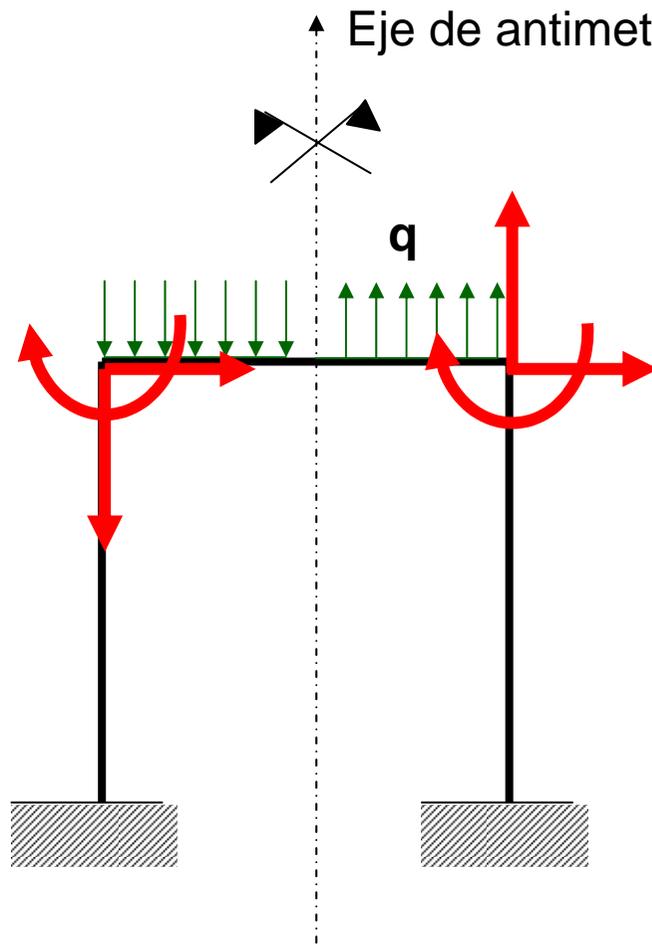


Reacciones horizontales: iguales

Reacciones verticales: iguales y opuestas

Momentos: iguales

¿Qué ocurre con los movimientos?

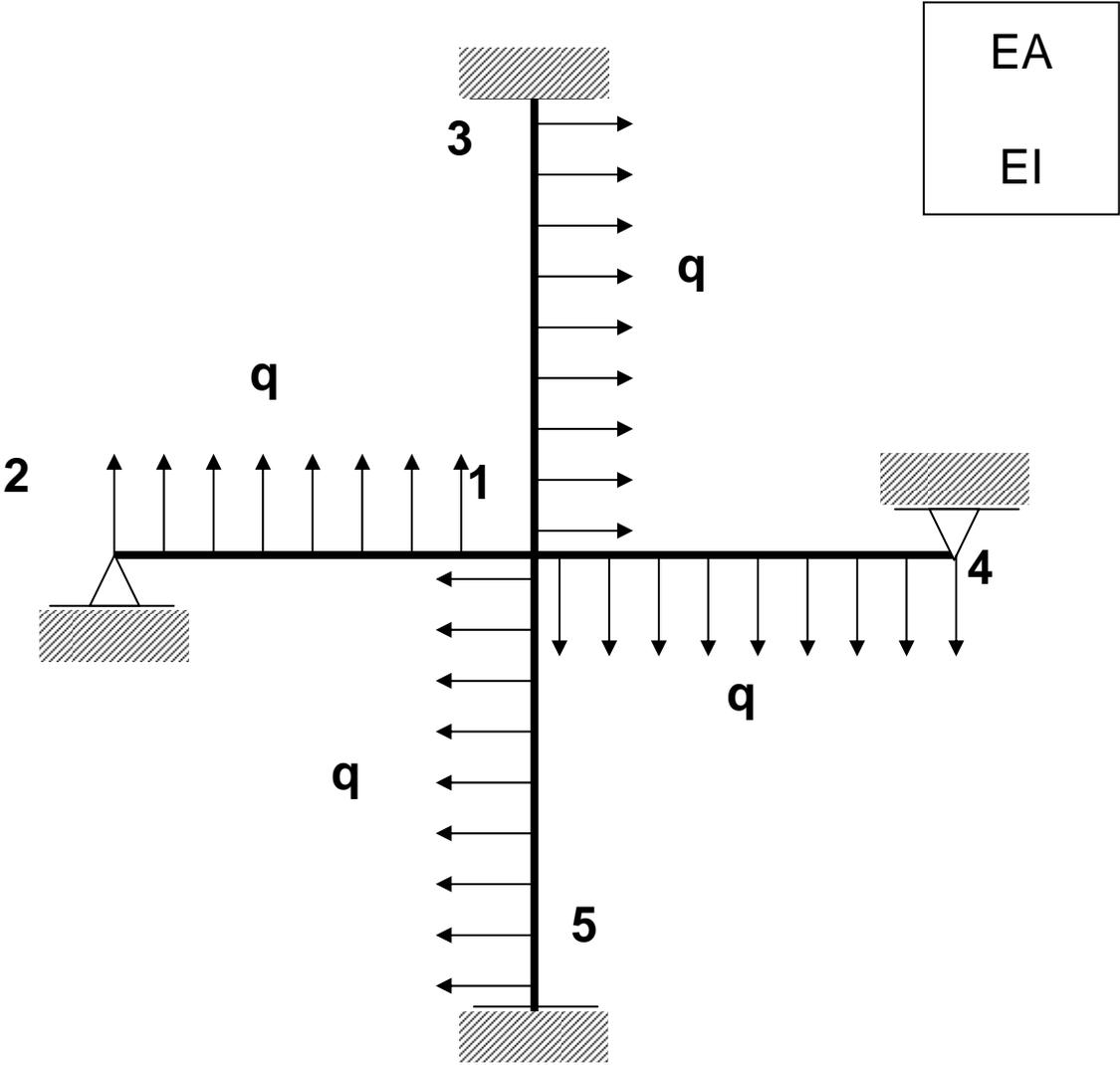


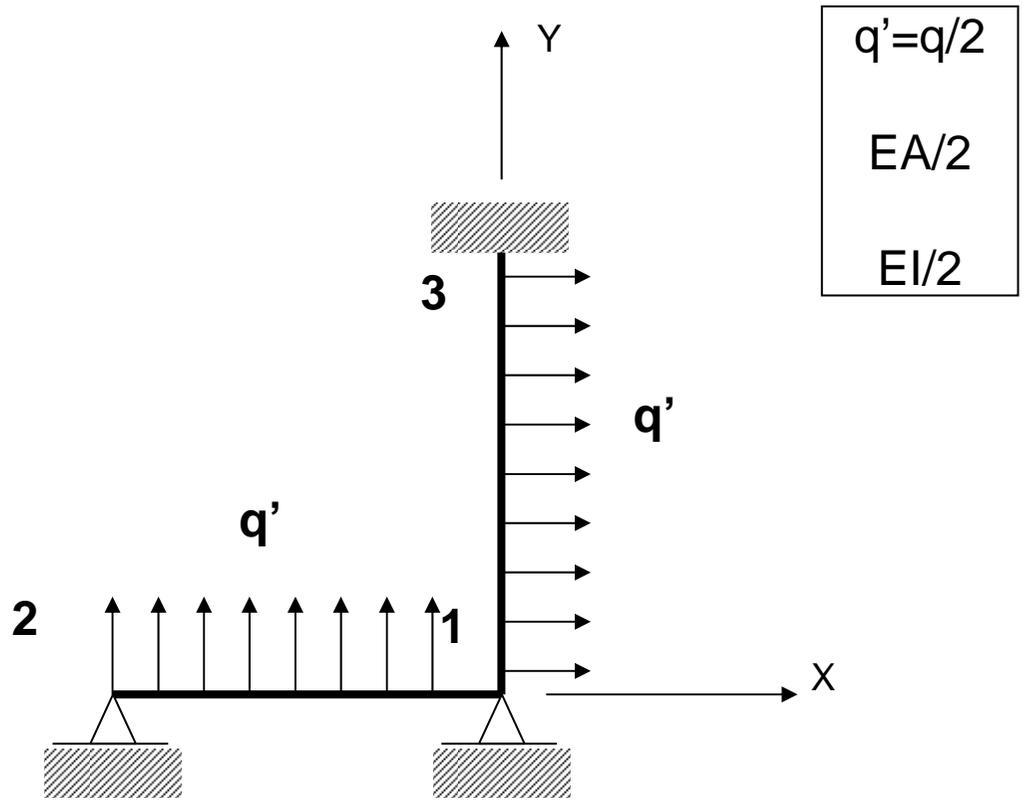
Desplazamientos horizontales: iguales

Desplazamientos verticales: iguales y opuestos

Giros: iguales

Estructura con dos ejes de antimetría





DESCOMPOSICIÓN DE UNA ESTRUCTURA SIMÉTRICA DE FORMA EN DOS CASOS: SIMÉTRICO Y ANTIMÉTRICO

