



Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Master en Mecánica Estructural Avanzada

Mecánica de Materiales Compuestos

Tema 2. Análisis de la lámina

Curso 2010/2011

Autores: Enrique Barbero Pozuelo, Shirley K. García Castillo, Sonia Sánchez Sáez



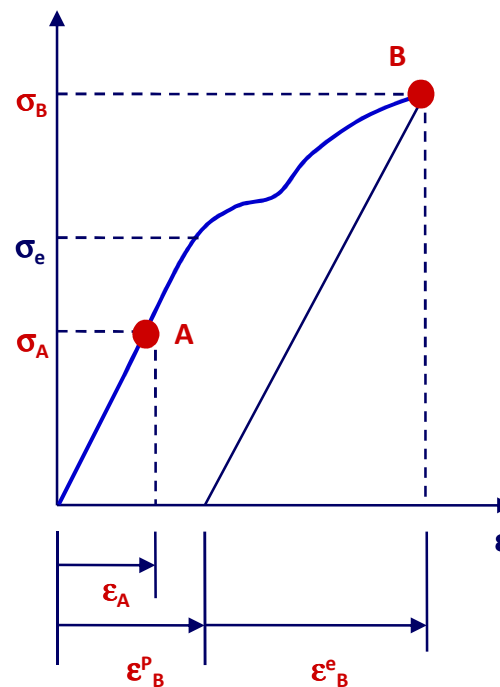
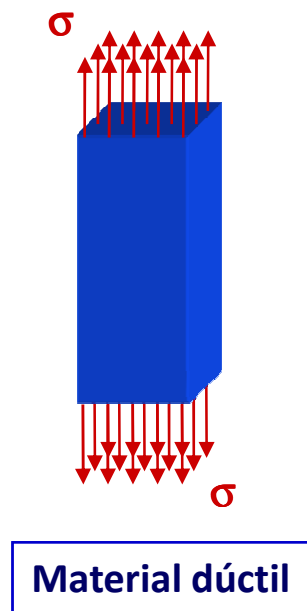


Tema 2.3 Rotura de la lámina

- Introducción
- Concepto de criterio de rotura
- Criterios de rotura
- Criterios de rotura desacoplada
- Criterios de rotura con interacción
- Criterios de rotura múltiple
- Comparación entre criterios

Concepto de criterio de rotura para materiales isótopos

En un estado de tracción



Criterio de Plastificación

$$\sigma - \sigma_e = 0$$

Punto A: Comportamiento elástico

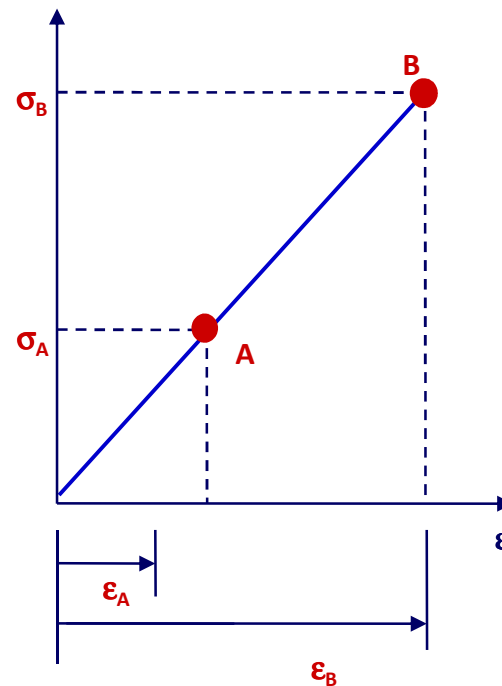
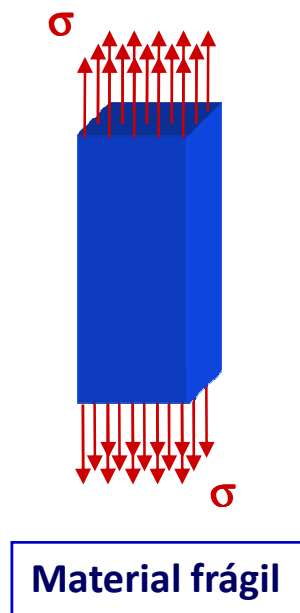
$$\sigma_A < \sigma_e$$

Punto B: Comportamiento plástico

$$\sigma_B > \sigma_e$$

Concepto de criterio de rotura para materiales isótopos

En un estado de tracción



Criterio de rotura

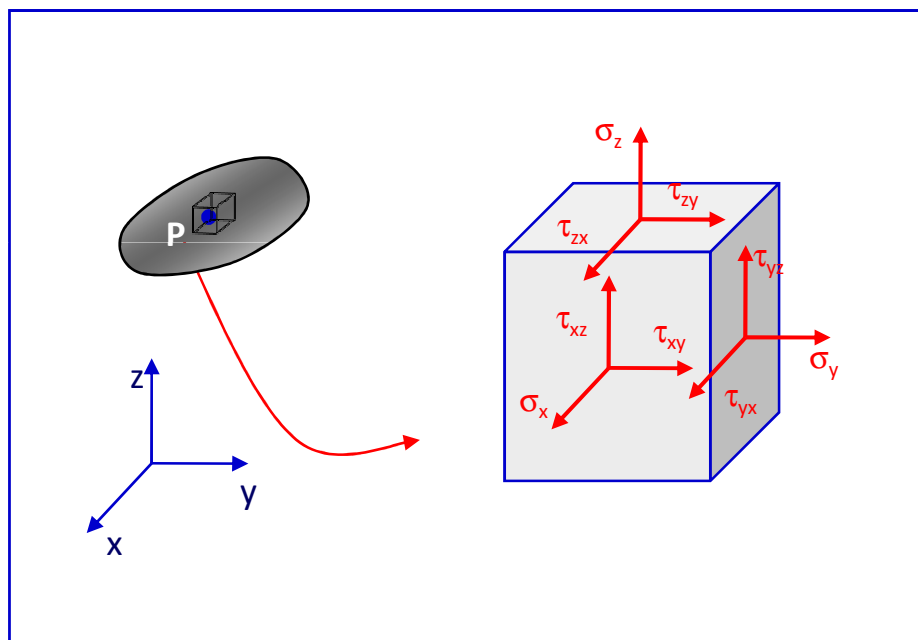
$$\sigma - \sigma_R = 0$$

Punto A: Material intacto

Punto B: Rotura

Concepto de criterio de rotura para materiales isótopos

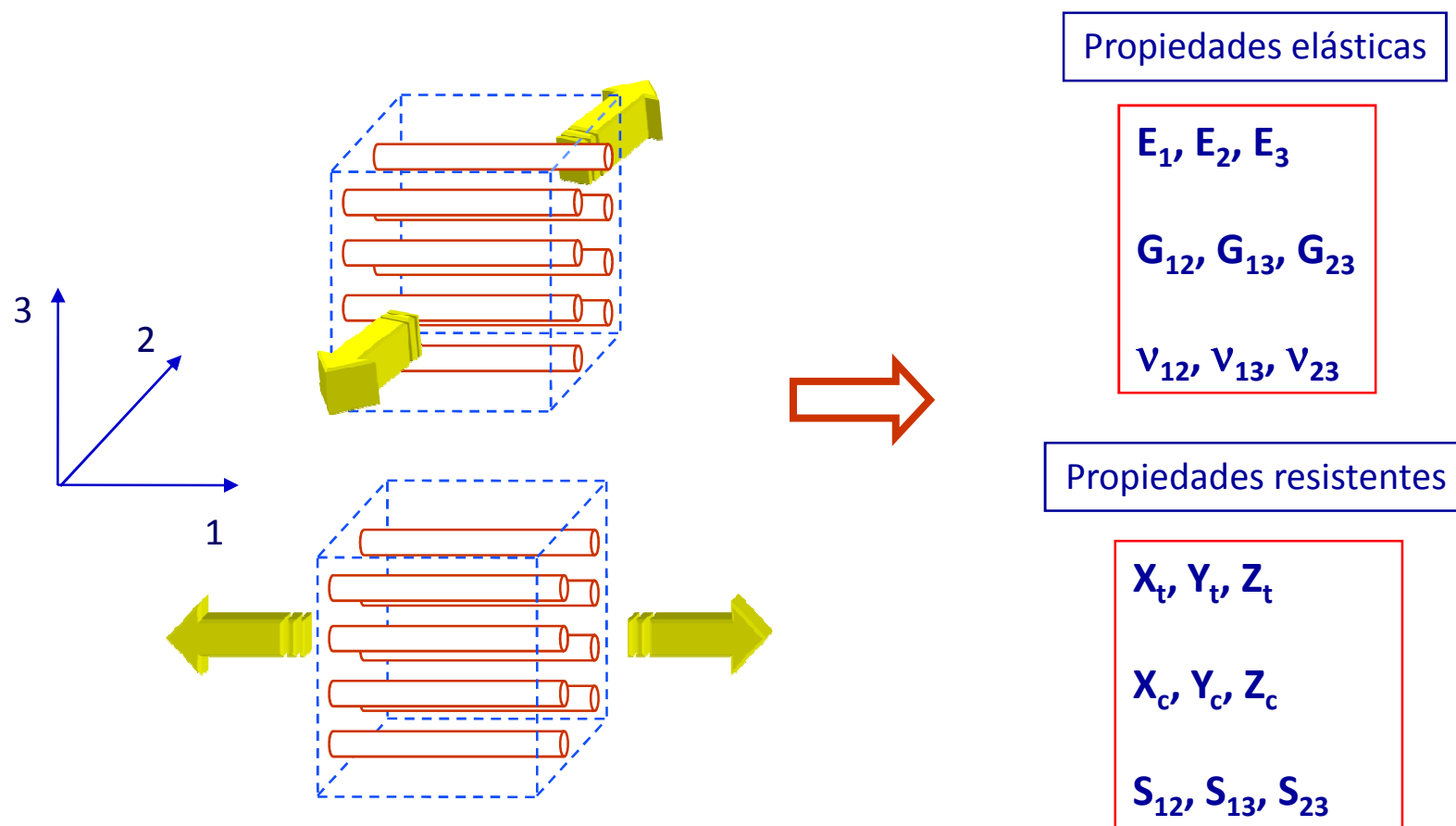
En un estado de tensiones genérico



Criterio de Rotura

Para materiales isótopos no existen direcciones privilegiadas:

Características distintivas de los materiales compuestos



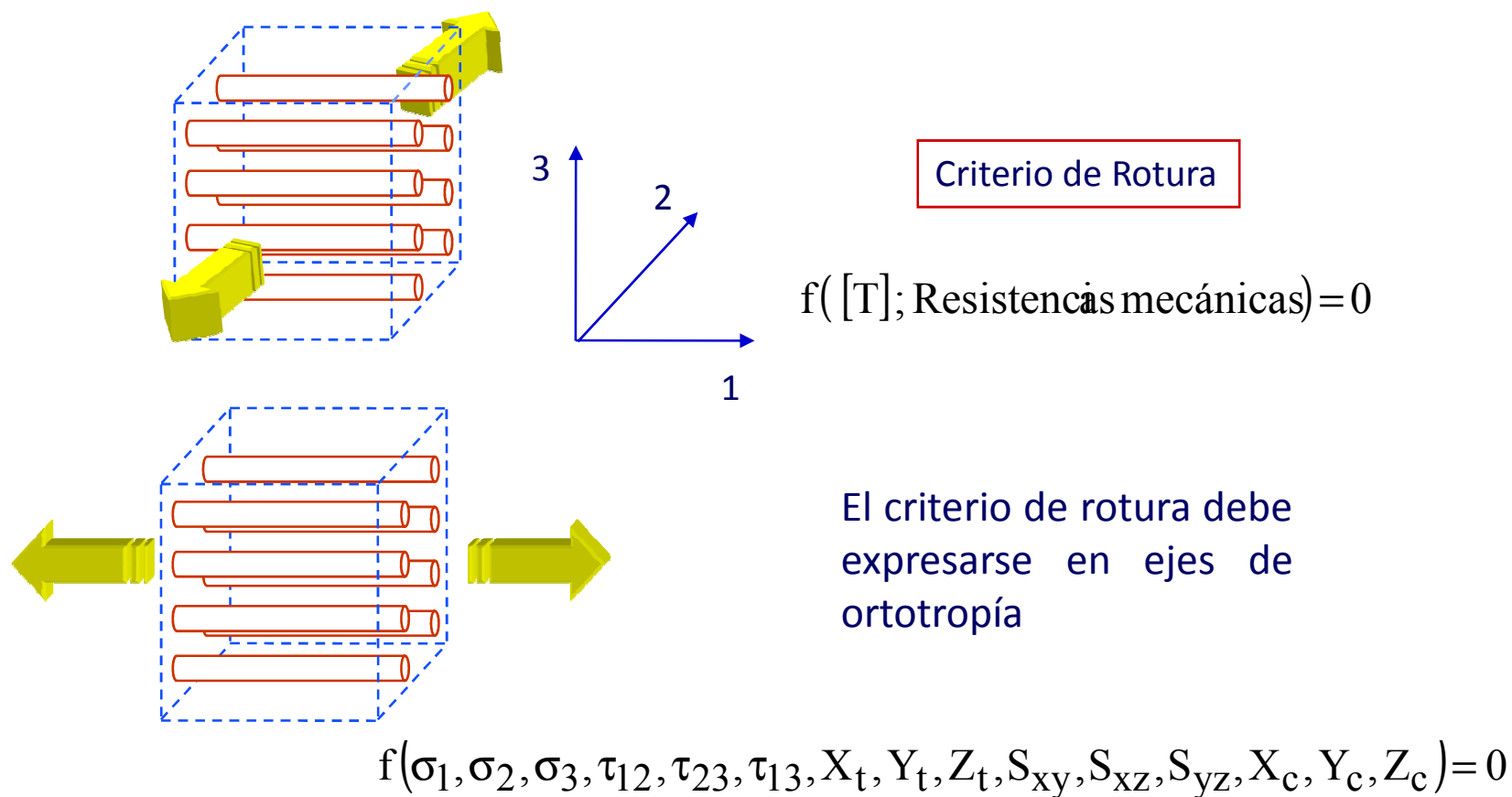


Propiedades mecánicas de los materiales compuestos

	<u>VIDRIO</u>	<u>ARAMIDA</u>	<u>CARBONO</u>
Densidad (kg/m^3)	2080	1350	1530
X_t (MPa)	1250	1410	1270
X_c (MPa)	600	280	1130
Y_t (MPa)	35	28	42
Y_c (MPa)	141	141	141
E_1 (GPa)	45	85	134
E_2 (GPa)	12	56	7
α_1 ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	$0.4\div 0.7 \times 10^{-5}$	-0.4×10^{-5}	-0.12×10^{-5}
α_2 ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	$1.6\div 2.0 \times 10^{-5}$	5.8×10^{-5}	3.4×10^{-5}



Concepto de criterio de rotura para materiales anisótropos



Clasificación de los criterios de rotura

Criterios de rotura desacoplada

Tensión máxima

Máxima deformación

Criterios de rotura con interacción

Tsai Hill

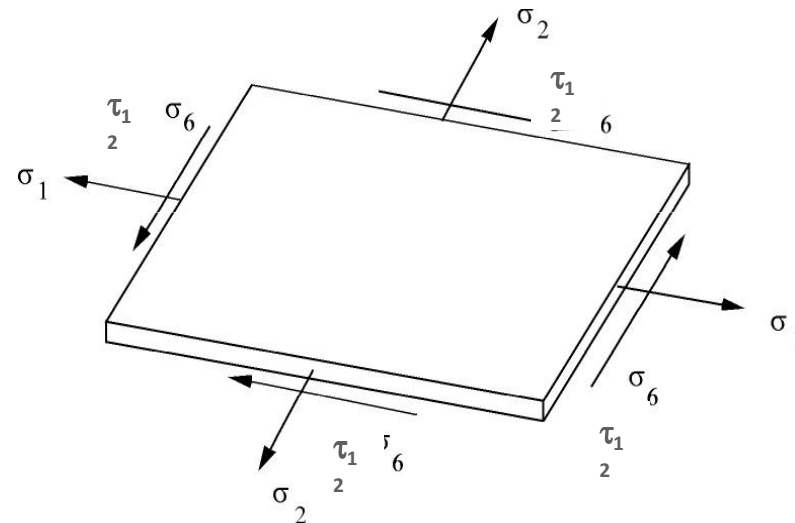
Hoftmann

Tsai Wu

Criterios de rotura múltiple

Hann, Erikson & Tsai

Hashin



Criterio de tensión máxima

**Criterio de rotura de Rankine,
Lamé, Clapeyron (1858)**

Materiales isótropos

$$(\sigma_I^2 - \sigma_e^2) \cdot (\sigma_{II}^2 - \sigma_e^2) \cdot (\sigma_{III}^2 - \sigma_e^2) \geq 0$$



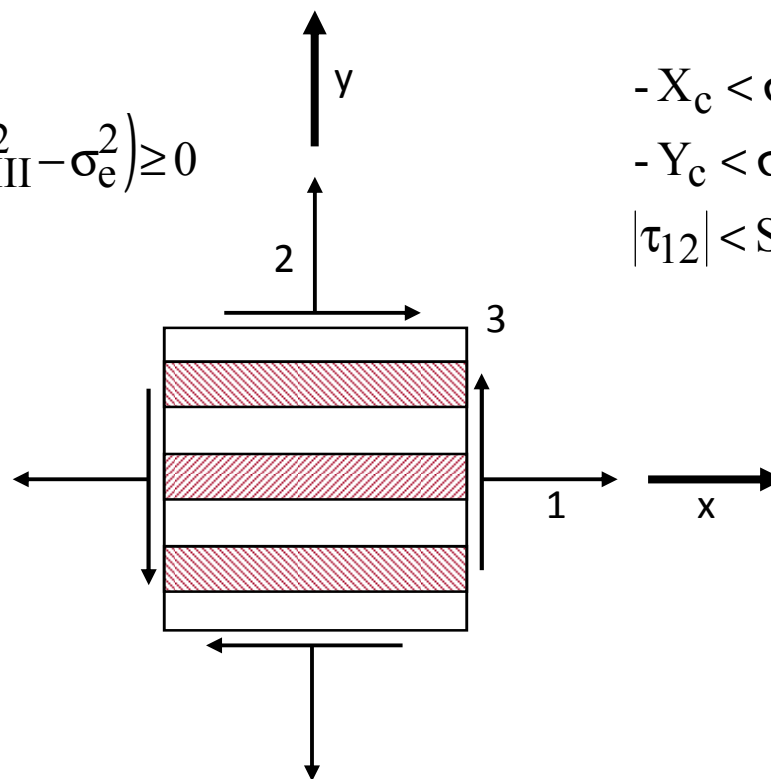
Jenkins (1920)

Materiales anisótropos

$$-X_c < \sigma_1 < X_t$$

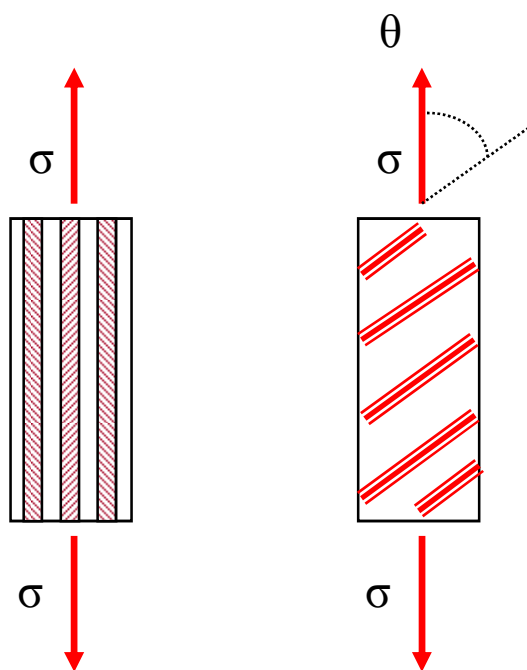
$$-Y_c < \sigma_2 < Y_t$$

$$|\tau_{12}| < S$$



Criterio de tensión máxima

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía



$$\sigma < X_t$$

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \cos^2 \theta$$

$$\sigma < \frac{X_t}{\cos^2 \theta}$$

$$\sigma_2 = \sigma \cdot \sin^2 \theta$$

$$\sigma < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta}$$

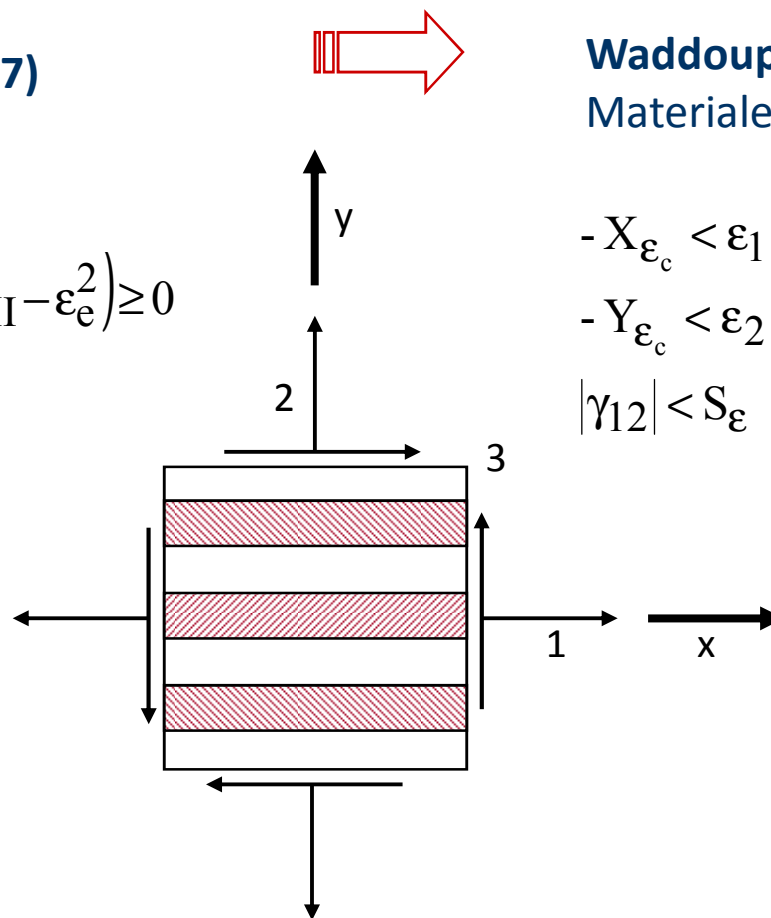
$$\tau_{12} = -\sigma \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\sigma < \frac{S}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$$

Criterio de máxima deformación

**Criterio de rotura
de Saint Venant (1837)**
Materiales isótropos

$$(\varepsilon_I^2 - \varepsilon_e^2) \cdot (\varepsilon_{II}^2 - \varepsilon_e^2) \cdot (\varepsilon_{III}^2 - \varepsilon_e^2) \geq 0$$



Waddoups (1967)
Materiales anisótropos

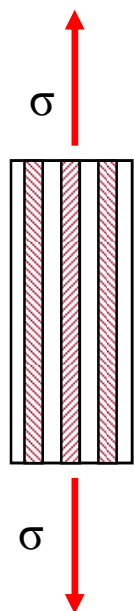
$$-X_{\varepsilon_c} < \varepsilon_1 < X_{\varepsilon_t}$$

$$-Y_{\varepsilon_c} < \varepsilon_2 < Y_{\varepsilon_t}$$

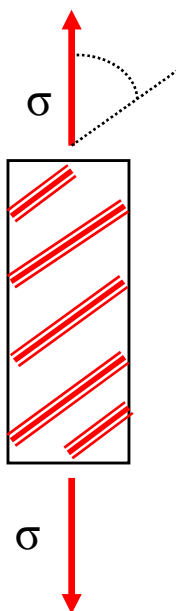
$$|\gamma_{12}| < S_{\varepsilon}$$

Criterio de máxima deformación

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía



$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma}{E_1} \\ \varepsilon_2 &= -\nu_{21} \cdot \frac{\sigma}{E_1} \\ \gamma_{12} &= 0\end{aligned}$$



$$\sigma_1 = \sigma \cdot \cos^2 \theta$$

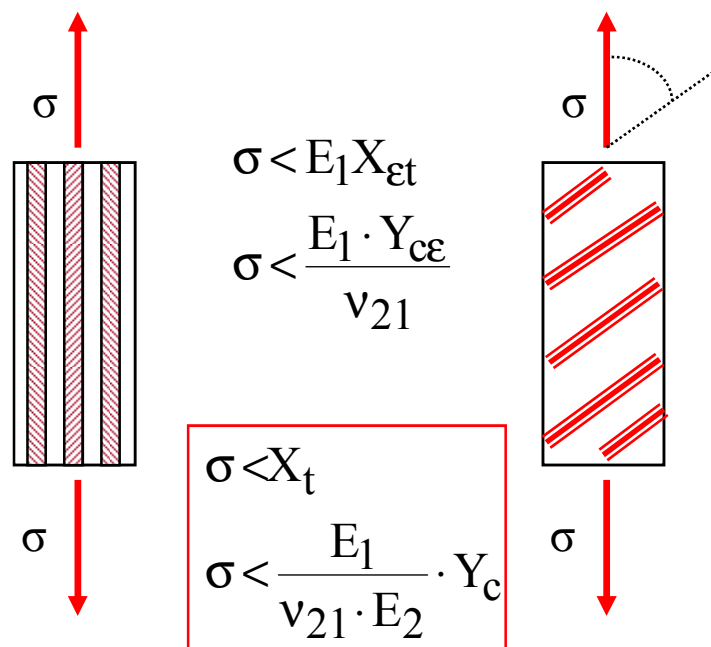
$$\sigma_2 = \sigma \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \cdot \sigma_2) = \frac{1}{E_1} (\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta) \cdot \sigma \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \cdot \sigma_1) = \frac{1}{E_2} (\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta) \cdot \sigma \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} = -\frac{1}{G_{12}} (\sin \theta \cdot \cos \theta) \cdot \sigma\end{aligned}$$

Criterio de máxima deformación

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía



$$X_{\epsilon t} = \frac{X_t}{E_1} \quad Y_{\epsilon t} = \frac{Y_t}{E_2} \quad S_{\epsilon} = \frac{S}{G_{12}}$$

$$X_{\epsilon c} = \frac{X_c}{E_1} \quad Y_{\epsilon c} = \frac{Y_c}{E_2}$$

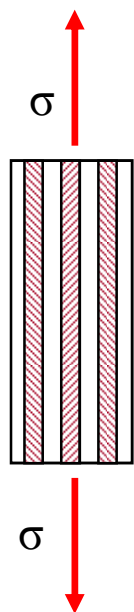
$$\sigma < \frac{X_t}{\cos^2 \theta - v_{12} \sin^2 \theta} \quad \sigma < \frac{X_c}{-\cos^2 \theta + v_{12} \sin^2 \theta}$$

$$\sigma < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - v_{21} \cos^2 \theta} \quad \sigma < \frac{Y_c}{-\sin^2 \theta + v_{21} \cos^2 \theta}$$

$$\sigma < \left| \frac{S}{\cos \theta \sin \theta} \right|$$

Criterio de máxima deformación

Comparación entre el criterio de tensión máxima y el de máxima deformación



Tensión Máxima

$$\sigma < X_t$$

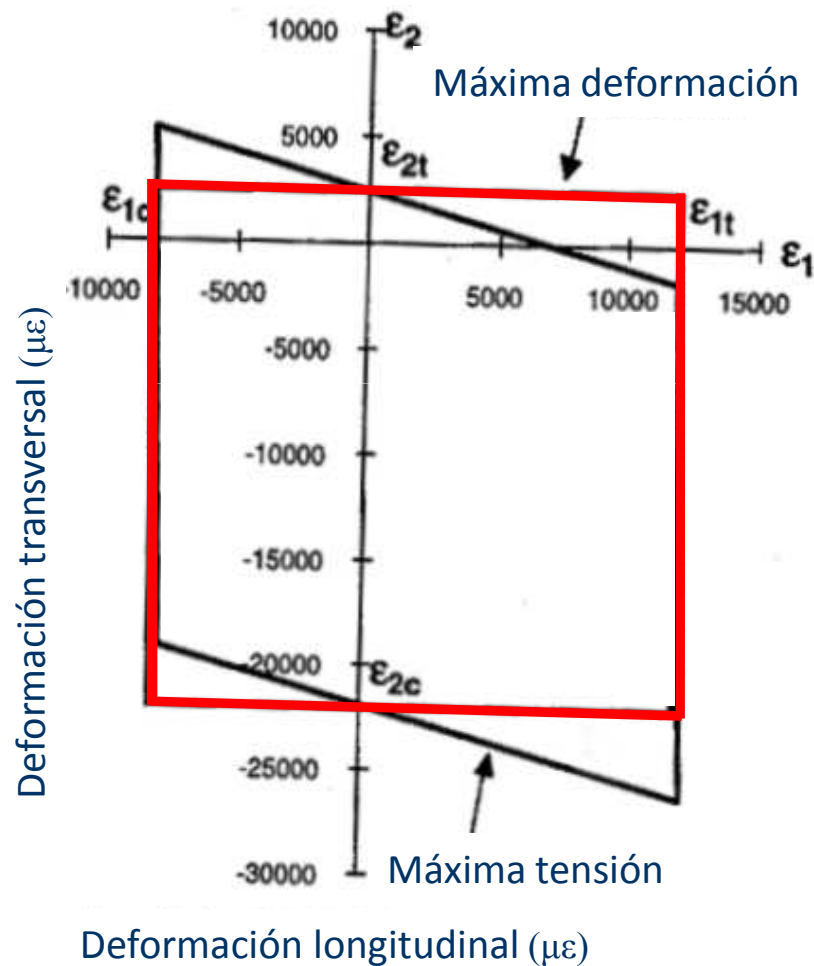
Máxima Deformación

$$\sigma < E_1 X_{\epsilon t}$$

$$\sigma < \frac{E_1 \cdot Y_{t\epsilon}}{\nu_{21}}$$

$$\sigma < X_t$$

$$\sigma < \frac{E_1}{E_2 \cdot \nu_{21}} \cdot Y_t$$



Criterio de Tsai-Hill

Criterio de plastificación de Von Mises (1900)

Materiales isótropos

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]}$$

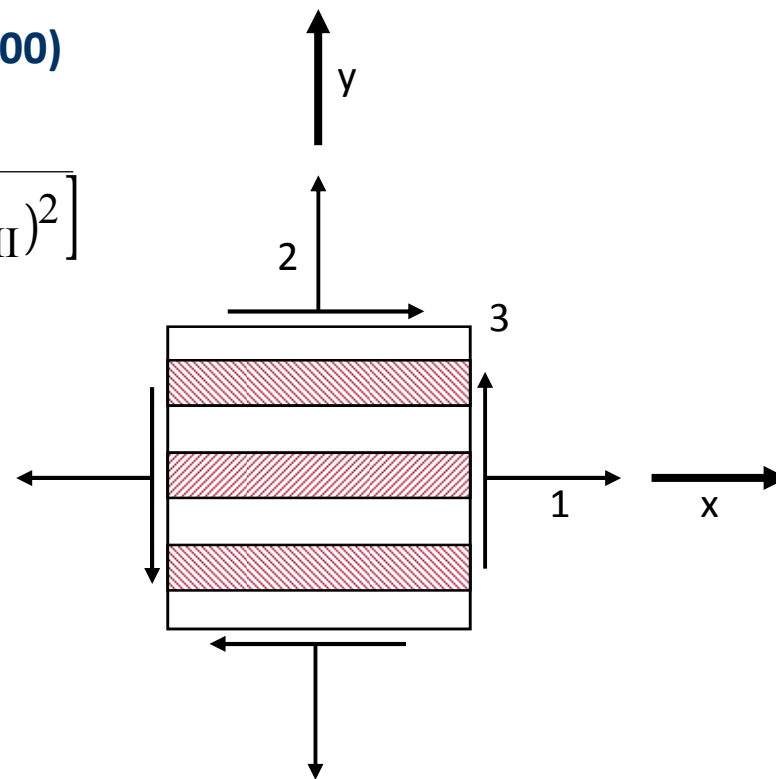
Criterio de plastificación de Hill (1948)

Materiales anisótropos

$$\begin{aligned} &(G+H) \cdot \sigma_1^2 + (F+H) \cdot \sigma_2^2 + (F+G) \cdot \sigma_3^2 \\ &- 2 \cdot H \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot G \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot F \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \\ &+ 2 \cdot L \cdot \tau_{23}^2 + 2 \cdot M \cdot \tau_{13}^2 + 2 \cdot N \cdot \tau_{12}^2 = 1 \end{aligned}$$

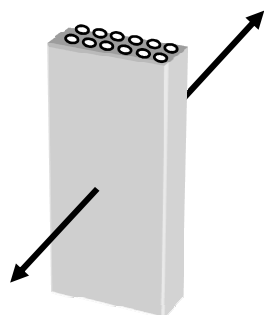
Criterio de rotura de Azzi y Tsai (1965)

Materiales anisótropos



➡ Criterio de rotura de Tsai-Hill

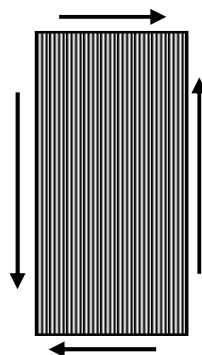
Criterio de Tsai-Hill



$$\sigma_3 = Z$$

$$(F + G)\sigma_3^2 = 1$$

$$(F + G) = \frac{1}{Z^2}$$



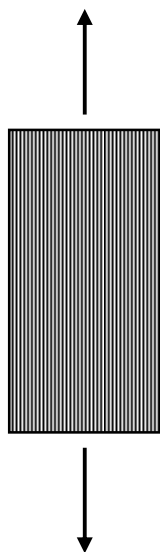
$$\tau_{12} = S$$

$$2 \cdot N \cdot \tau_{12}^2 = 1$$

$$2N = \frac{1}{S^2} \Rightarrow$$

$$2L = \frac{1}{S_{yz}^2}$$

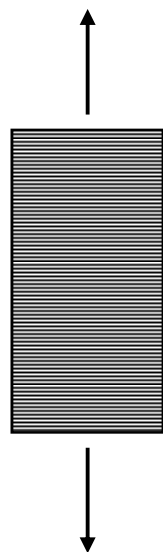
$$2M = \frac{1}{S_{xz}^2}$$



$$\sigma_1 = X$$

$$(G + H)\sigma_1^2 = 1$$

$$(G + H) = \frac{1}{X^2}$$



$$\sigma_2 = Y$$

$$(F + H)\sigma_2^2 = 1$$

$$(F + H) = \frac{1}{Y^2}$$

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}$$

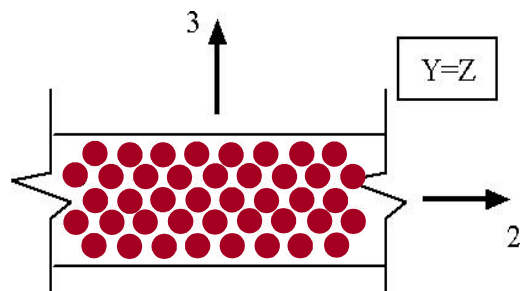
$$2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}$$

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}$$

Criterio de Tsai-Hill

$$\frac{1}{X^2}\sigma_1^2 + \frac{1}{Y^2}\sigma_2^2 + \frac{1}{Z^2}\sigma_3^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_1\sigma_3 - \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{S_{yz}^2}\tau_{23}^2 + \frac{1}{S_{xz}^2}\tau_{13}^2 + \frac{1}{S^2}\tau_{12}^2 = 1$$

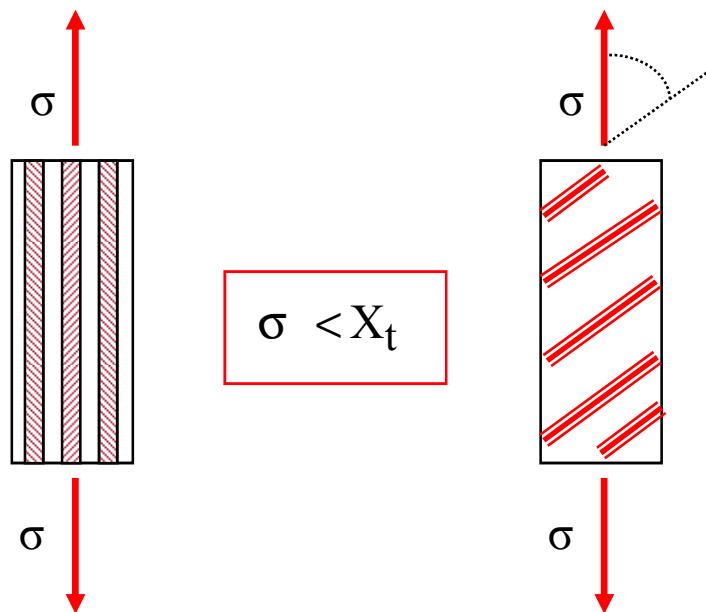
Para una lámina unidireccional trabajando en tensión plana



$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

Criterio de Tsai-Hill

Aplicación a estados de carga no aplicados en ejes de ortotropía



$$\sigma_1 = \sigma \cdot \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma^2}$$



Criterio de Tsai-Hill

Limitaciones del criterio de Tsai-Hill

- No considera que la Resistencia Mecánica a tracción pueda ser diferente que a compresión
- El criterio de Hill asume que bajo un estado hidrostático no se produce la plastificación

$$X_1 = \begin{cases} X_t, \sigma_1 \geq 0 \\ X_c, \sigma_1 \leq 0 \end{cases}$$
$$X_2 = \begin{cases} X_t, \sigma_2 \geq 0 \\ X_c, \sigma_2 \leq 0 \end{cases}$$
$$Y = \begin{cases} Y_t, \sigma_2 \geq 0 \\ Y_c, \sigma_2 \leq 0 \end{cases}$$

Criterio de Tsai-Hill modificado

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} - \left(\frac{\sigma_1}{X_1}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_2}{X_2}\right) + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

Criterio de Hoffman

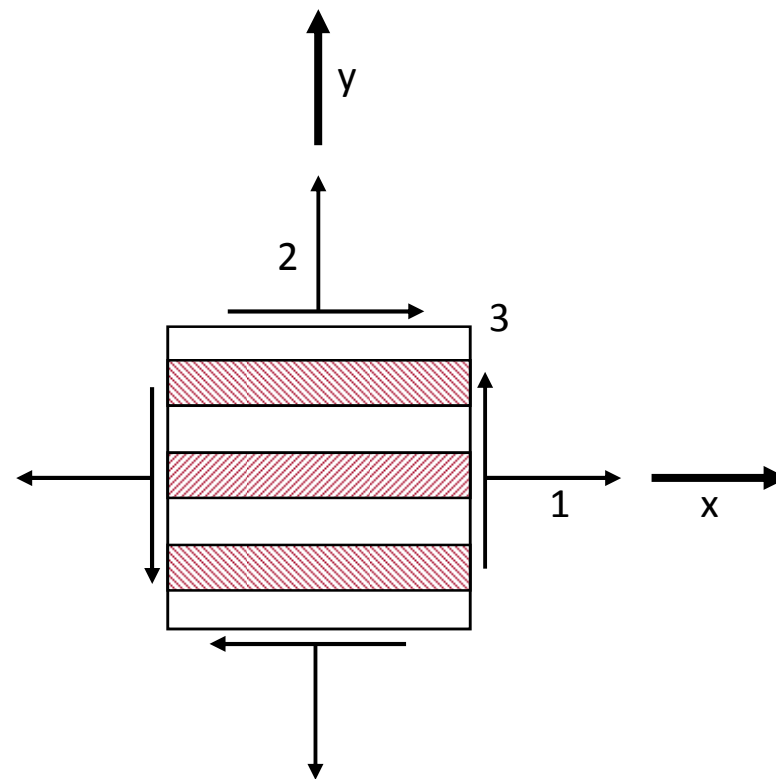
Hoffman (1967)

Para una lámina unidireccional trabajando en tensión plana

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + 2 \cdot B_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c} \quad F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c} \quad B_{12} = -\frac{1}{2 \cdot X_t \cdot X_c}$$

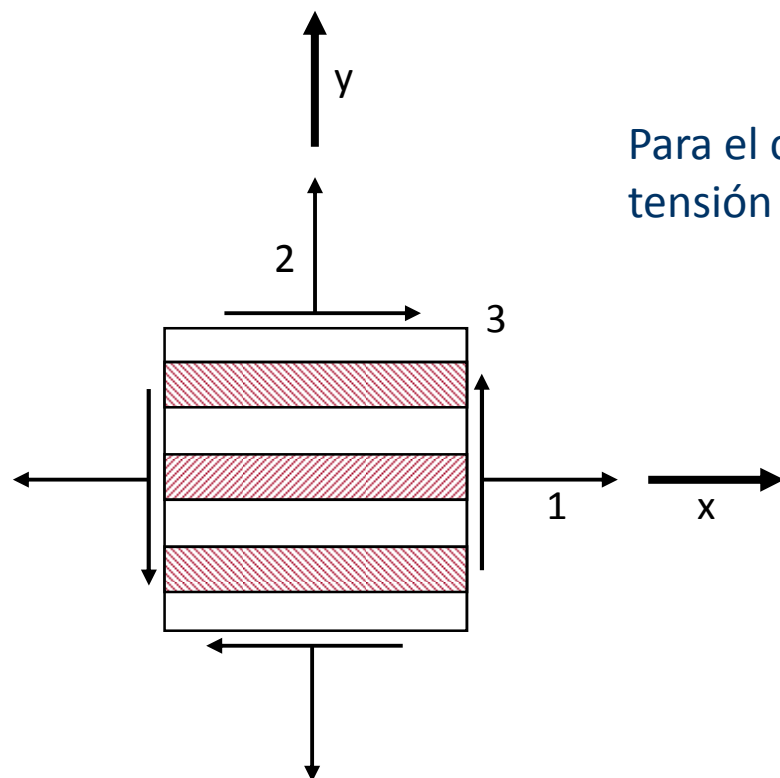


Criterio de Tsai-Wu

Criterio de rotura polinómico (1971) $F_i \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \cdot \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1$

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1$$

siendo F_i y F_{ij} dos tensores de orden 2 y 4 respectivamente.



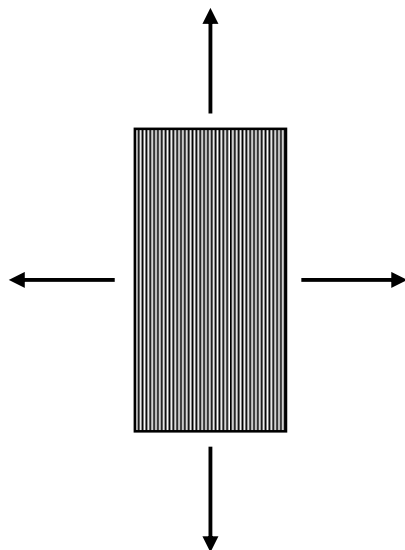
Para el caso de una lámina ortótropa trabajando en tensión plana:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_6 \cdot \tau_{12} + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + \\ + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + 2 \cdot F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$$

Criterio de Tsai-Wu

¿ Y F_{12} ?

a) Mediante un ensayo biaxial



$$\sigma_1 = \sigma_1^R$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^R$$

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1$$

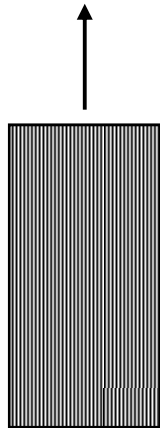
$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right]$$

$$F_{12} = f(X_t, X_c, Y_t, Y_c, \sigma_{\text{roturabiaxial}})$$

¡ No es una propiedad de la lámina!

Criterios de rotura con interacción

Criterio de Tsai-Wu



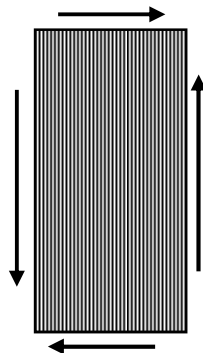
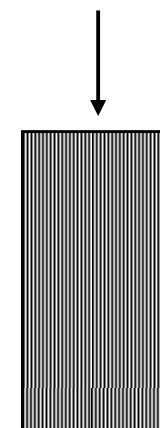
$$\sigma_1 = X$$

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1$$

$$F_1X + F_{11}X^2 = 1$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}$$



$$\sigma_1 = -X'$$

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1$$

$$-F_1X' + F_{11}X'^2 = 1$$

Análogamente:

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c}$$

$$\tau_{12} = S$$

$$F_6\tau_{12} + F_{66}\tau_{12}^2 = 1$$

$$-F_6\tau_{12} + F_{66}\tau_{12}^2 = 1$$

$$F_6 = 0$$

$$F_{66} = \frac{1}{S^2}$$



Criterio de Tsai-Wu

b) Por equivalencia con el criterio de Von Mises

Aplicando el criterio de Tsai-Wu como criterio de plastificación de un material metálico isótropo en ejes principales:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$

$$X_t = X_c = \sigma_e \quad F_{11} = F_{22} = \frac{1}{\sigma_e^2}$$
$$Y_t = Y_c = \sigma_e$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_e}\right)^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$



Criterio de Tsai-Wu

Por otro lado aplicando el criterio de Von Mises:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_e}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} = 1 \quad 2 \cdot F_{12} = -\frac{1}{\sigma_e^2} \quad 2 \cdot F_{12} = -\left(\frac{1}{\sigma_e}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma_e}\right)$$

Generalizando a un material anisótropo:

$$2 \cdot F_{12} = -\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$$

$$F_{12} = F_{12}^* \cdot \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \quad -0.5 < F_{12}^* < 0$$



Criterio de Hahn, Erikson y Tsai

Rotura de las fibras

$$(F_{11} \cdot \sigma_1^2) + (F_1 \cdot \sigma_1) = 1$$

Rotura de la matriz

$$F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + F_{44} \cdot \tau_{13}^2 + F_{55} \cdot \tau_{23}^2 + F_2 \cdot \sigma_2 = 1$$

Criterio de Hashin

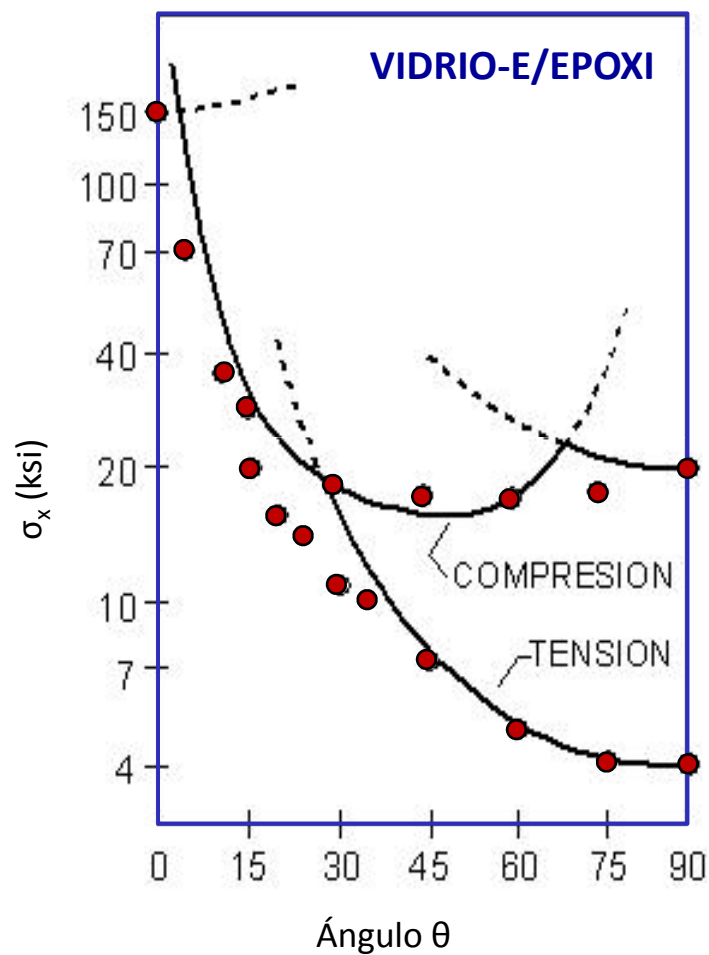
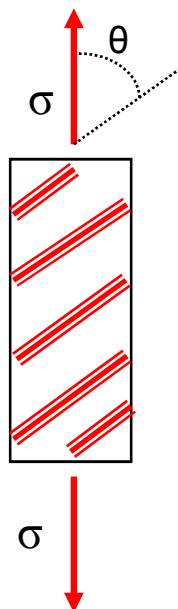
Rotura de las fibras

$$F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + F_1 \cdot \sigma_1 = 1$$

Rotura de la matriz

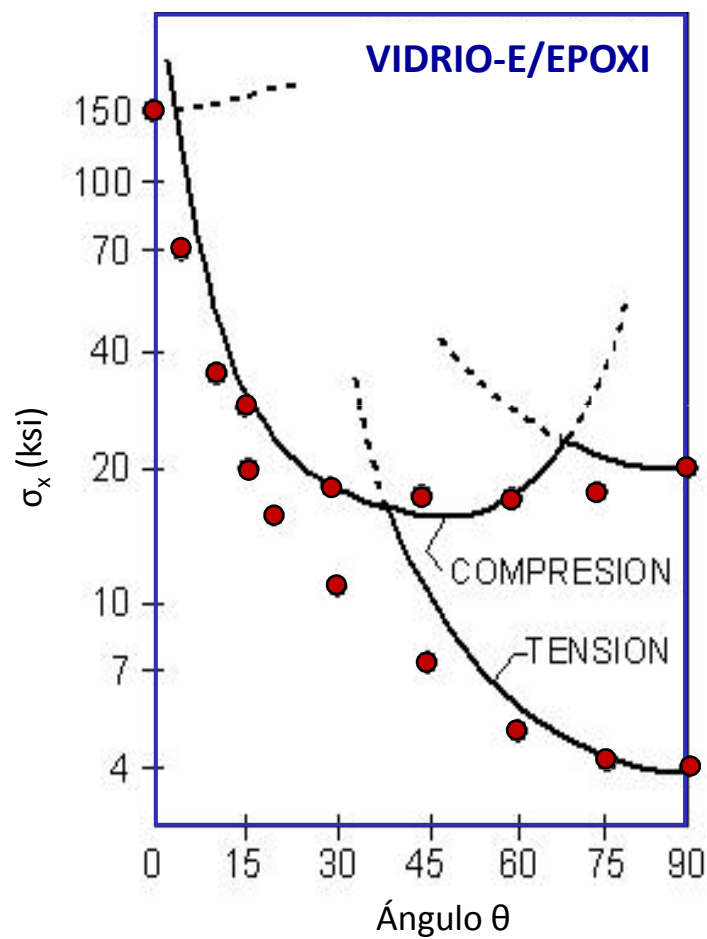
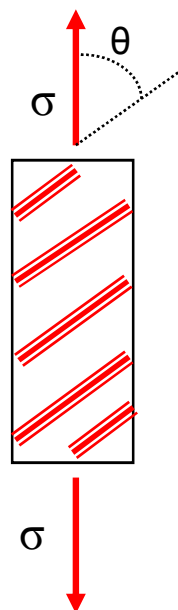
$$F_{22} \cdot \sigma_2^2 + F_{66} \cdot \tau_{12}^2 + F_{44} \cdot \tau_{13}^2 + F_{55} \cdot \tau_{23}^2 + F_2 \cdot \sigma_2 = 1$$

Comparación entre criterios



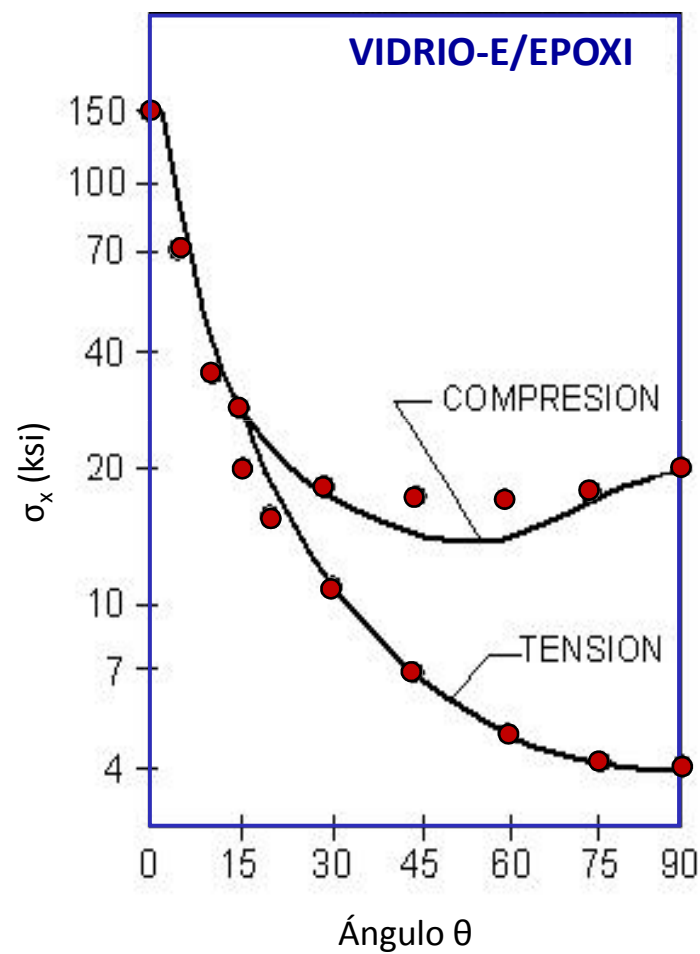
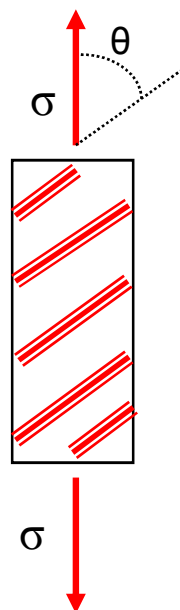
Criterio de Tensión Máxima

Comparación entre criterios



Criterio de Máxima Deformación

Comparación entre criterios



Criterio de Tsai-Hill



Comparación entre criterios

