Boletín de problemas bloque B2

Nombre del curso: Teoría Moderna de la Detección y Estimación

Autores: Jerónimo Arenas García, Jesús Cid Sueiro, Vanessa Gómez Verdejo, Miguel Lázaro Gredilla, Emilio Parrado Hernández

BY NC SA

Universidad Carlos III de Madrid

Colección de Problemas y Ejercicios - Bloque 2: Decisión

Los problemas y ejercicios que se incluyen pertenecen en su mayoría a exámenes de convocatorias anteriores. Junto a cada ejercicio se muestra los puntos del temario de la asignatura cubiertos:

2.1. Decisión multiclase.

2.2. Decisión binaria.

2.3. Caso binario con verosimilitudes gaussianas.

2.4. Caracterización de clasificadores mediante la curva ROC.

2.5. Otras reglas de clasificación: Neyman-Pearson y minimax.

2.6. Función discriminante.

Notación:

- Decisor ML: Decisor de máxima verosimilitud [$\phi_{\mathrm{ML}}(\mathbf{x})$].
- Decisor MAP: Decisor máximo a posteriori [$\phi_{\mathrm{MAP}}(\mathbf{x})$].
- LRT: Test de razón de verosimilitudes.
- P_{e}: probabilidad de error.
- P_{FA}: probabilidad de falsa alarma.
- P_{M}: probabilidad de pérdidas.
- P_{D}: probabilidad de detección.
- Curva ROC: curva característica de operación.

Ejercicio 1 (2.2; 2.4; 2.6)

En un problema de clasificación binaria se sabe que las observaciones presentan las siguientes distribuciones:

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|0) &= \exp(-x), \qquad && x > 0 \\ p_{X|H}(x|1) &= a\exp(-ax), && x > 0 \end{aligned}$$

con $a > 1$. Para la toma de la decisión se dispone de un conjunto de K observaciones independientes tomadas bajo la misma hipótesis: $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$.

(a) Obténgase el decisor ML basado en el conjunto de observaciones $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$ y compruébese, a partir de resultado obtenido, que $T = \sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$ es un estadístico suficiente para la decisión. Considérese para el resto del ejercicio $K = 2$.

(b) Calcúlense las verosimilitudes del estadístico T, $p_{T|H}(t|0)$ y $p_{T|H}(t|1)$.

(c) Calcúlense, en función del valor de η, las $P_{\rm FA}$ y $P_{\rm M}$ del decisor de umbral

$$t \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \eta$$

(d) Represéntese de forma aproximada la curva ROC del decisor anterior, indicando:

- Cómo se desplaza el punto de trabajo al aumentar η.
- Cómo se modificaría la curva ROC si creciese el número de observaciones disponibles (K).
- Cómo se modificaría la curva ROC al incrementar el valor de a.

Solution:

(a) $t \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \dfrac{K \ln a}{a-1}$

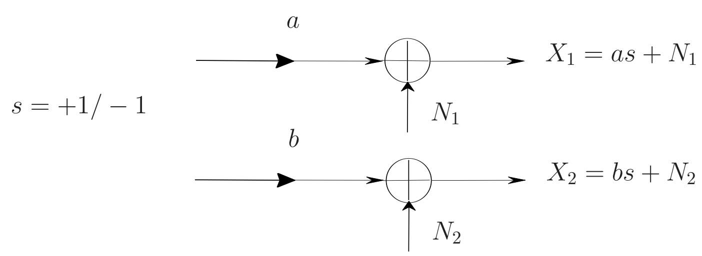
(b) $$\begin{aligned} p_{T|H}(t|0) &= t\exp(-t), & t>0 \\ p_{T|H}(t|1) &= a^2 t\exp(-at), & t>0 \end{aligned}$$

(c) $P_{\rm FA} = 1-(\eta+1)\exp(-\eta) \quad P_{\rm M} = (a\eta+1)\exp(-a\eta)$

(d)
- Para $\eta = 0,\ P_{\rm FA} = P_{\rm D} = 0$; Para $\eta \to \infty,\ P_{\rm FA} = P_{\rm D} = 1$.
- Si crece el número de observaciones, necesariamente debe mejorar la curva ROC.
- Si crece el valor de a, también debe mejorar la curva ROC. Una comprobación rigurosa sería: $\dfrac{\partial P_{\rm M}}{\partial a} = -a\eta^2 exp(-a\eta) < 0$, luego la probabilidad de pérdida decrece al aumentar el valor de a.

Ejercicio 2 (2.3; 2.6)

Considérese un sistema de comunicaciones en el que los símbolos "+1" ó "−1" se transmiten simultáneamente por dos canales ruidosos, tal y como se ilustra en la figura:



siendo a y b dos constantes positivas desconocidas que caracterizan a los canales y N_1 y N_2 dos variables de ruido gaussiano caracterizados por

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \sim G\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right].$$

donde $|\rho| < 1$. Se sabe, además, que las probabilidades de transmisión de ambos símbolos son iguales.

(a) Si se desea construir un decisor para discriminar cuál fue el símbolo transmitido utilizando únicamente una de las dos observaciones disponibles, X_1 o X_2, indíquese cuál de las dos variables utilizaría, justificando su respuesta en función de los valores de las constantes. Proporciónese la forma analítica del decisor ML correspondiente.

(b) Obténgase el decisor binario de mínima probabilidad de error basado en la observación conjunta de X_1 y X_2, expresando el resultado como función de a, b y ρ. Simplifique la expresión de dicho decisor tanto como le sea posible.

(c) Para $\rho = 0$, calcúlese la probabilidad de error del decisor diseñado en b). Exprese su resultado utilizando la función:

$$F(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Solution:

(a) Si $a > b$: $\quad x_1 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 0 \qquad$ Si $a < b$: $\quad x_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 0$

(b) $(a - \rho b)x_1 + (b - \rho a)x_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 0$

(c) $P_{\mathrm{e}} = F(-\sqrt{a^2 + b^2})$

Ejercicio 3 (2.2; 2.4)

Las siguientes verosimilitudes caracterizan un problema de decisión binario bidimensional con $P_H(0) = 3/5$:

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1, x_2|0) = \begin{cases} 2, & 0 < x_1 < 1 \quad 0 < x_2 < 1 - x_1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

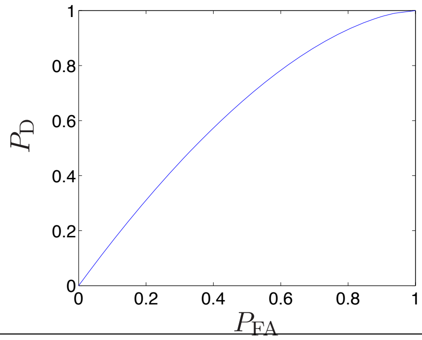
$$p_{X_1,X_2|H}(x_1, x_2|1) = \begin{cases} 3\,(x_1 + x_2)\,, & 0 < x_1 < 1 \quad 0 < x_2 < 1 - x_1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Considérese un decisor LRT genérico con umbral η,

(a) Calcúlese la P_{FA} en función de η.

(b) La siguiente figura representa la ROC del LRT. Justificando su respuesta:

- Indique sobre la ROC cómo varía el punto de trabajo del decisor al aumentar o disminuir el umbral del test.
- Situe sobre la ROC los puntos de trabajo correspondientes al decisor ML, al decisor de mínima probabilidad de error y al decisor de Neyman-Pearson con $P_{\mathrm{FA}} = 0.3$.



Solution:

(a) $x_1 + x_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{2}{3}\eta = \eta' \qquad P_{FA} = 1 - \eta'^2$

(b)
- P_{FA} y P_D decrecen al aumentar el umbral
- Decisor ML: $\eta = 1$, $\eta' = \frac{2}{3}$, $P_{FA} = \frac{5}{9}$.
  Decisor MAP: $\eta = \frac{3}{2}$, $\eta' = 1$, $P_{FA} = 0$.
  Decisor N-P: $P_{FA} = 0.3$.

Ejercicio 4 (2.3)

Considere el par de hipótesis equiprobables:

$$\begin{aligned} H = 0: &\quad X = N \\ H = 1: &\quad X = N + aS \end{aligned}$$

donde N y S son variables aleatorias gaussianas independientes, con medias nulas y varianzas v_n y v_s, respectivamente, y a es una constante conocida.

(a) Verifique que el test de mínima probabilidad de error tiene la forma

$$c_1 \exp\left(c_2 x^2\right) \gtrless \eta$$

y calcule las constantes c_1 y c_2, indicando el criterio de decisión asociado.

(b) Determine las regiones de decisión sobre x. Nótese que dichas regiones pueden expresarse en función de las constantes c_1 y c_2.

Solution:

(a) $c_1 \exp\left(c_2 x^2\right) \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 1$, donde $c_1 = \frac{P_H(0)}{P_H(1)}\sqrt{\frac{v_n}{v_n + a^2 v_s}}$ y $c_2 = \frac{1}{2v_n} - \frac{1}{2\left(v_n + a^2 v_s\right)}$

(b) $|x| \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \sqrt{\frac{-\ln c_1}{c_2}}$

Ejercicio 5 (2.2)

La densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Z es

$$p_{X,Z}(x, z) = x + z, \qquad 0 \le x, z \le 1$$

Considérese el problema de decisión basado en la observación de X (pero no de Z) dado por las hipótesis:

$$\begin{aligned} H = 0: &\quad Z < 0.6 \\ H = 1: &\quad Z > 0.6 \end{aligned}$$

(a) Determínese $p_{Z|X}(z|x)$.
(b) Obténganse las probabilidades a posteriori de ambas hipótesis.
(c) Determínese el decisor MAP basado en X.
(d) Aplicando el Teorema de Bayes, calcúlense $p_{X|H}(x|0)$ y $p_{X|H}(x|1)$.
(e) Calcúlese la probabilidad de falsa alarma del decisor MAP.
(f) Determínese el decisor ML basado en X.

Solution:

(a) $p_{Z|X}(z|x) = \dfrac{2\,(x+z)}{2x+1}, \quad 0 \le x, z \le 1$

(b) $P_{H|X}(0|x) = \dfrac{1.2x + 0.36}{2x+1} \qquad P_{H|X}(1|x) = 1 - \dfrac{1.2x + 0.36}{2x+1}$

(c) $x \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} 0.7$

(d) $p_{X|H}(x|0) = \dfrac{2x+0.6}{1.6}$ y $p_{X|H}(x|1) = \dfrac{0.8x+0.64}{1.04}$

(e) $P_{\text{FA}} = 0.5687$

(f) $x \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} 0.5$

Ejercicio 6 (2.2; 2.4; 2.5)

Considérese el problema de decisión binario dado por $P_H(1) = 2P_H(0)$ y verosimilitudes:

$$p_{X|H}(x|0) = 2(1-x), \quad 0 \le x \le 1$$
$$p_{X|H}(x|1) = 2x - 1, \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$$

(a) Determínese el decisor de mínimo coste medio con $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{10} = 4c_{01}$.
(b) Determínese el decisor de Neyman-Pearson dado por $P_{\text{FA}} = 0.04$.
(c) Determínense, en función del parámetro α, las probabilidades de detección y falsa alarma de la familia de decisores de la forma

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \alpha$$

(d) Represéntese gráficamente (de forma aproximada) la curva característica de operación (ROC), tomando α como parámetro libre, e indicando cómo varía el punto de trabajo del decisor en función de su valor.
(e) Indíquese si los decisores de los apartados (a) y (b) se corresponden con algún punto de la ROC y, en su caso, indique con cuál(es).

Solution:

(a) Si $x < \frac{1}{2}$: $D = 0$; Si $\frac{1}{2} < x < 1$: $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{5}{6}$; Si $x > 1$: $D = 1$

(b) $\alpha = 0.8$.

(c) $P_{\text{FA}} = \begin{cases} (1-\alpha)^2 & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & 1 < \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad P_{\text{D}} = \begin{cases} 1 & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ 1 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 & \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 1 < \alpha < \frac{3}{2} & P_{\text{FA}} = 0 & P_{\text{D}} = 1 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \frac{1}{2} < \alpha < 1 & P_{\text{FA}} = (1-\alpha)^2 & P_{\text{D}} = 1 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \\ 0 < \alpha < \frac{1}{2} & P_{\text{FA}} = (1-\alpha)^2 & P_{\text{D}} = 1 \end{cases}$

(e) (a) $\alpha = 5/6$ (b) $\alpha = 0.8$

Ejercicio 7 (2.3)

Se tiene un problema de clasificación binaria bidimensional definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1, x_2|0) = G\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1, x_2|1) = G\left(\mathbf{m}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Represéntese en el plano $X_1 - X_2$ la frontera de decisión que proporciona el decisor MAP cuando se satisfacen las siguientes condiciones: $P_H(0) = P_H(1)$, $v_0 = v_1$ y $\rho = 0$. Indique cómo se modificaría la frontera anterior si:

(a) Las probabilidades a priori fuesen $P_H(0) = 2P_H(1)$.

(b) Se incrementase el valor de ρ.

Solution: La frontera es la mediatriz de la recta que une los centros de las dos gaussianas.

(a) Si la $P_H(0)$ es mayor, la recta se desplaza hacia la verosimilitud de $H = 1$, es decir, hacia el punto $\mathbf{m}$.

(b) No varía.

Ejercicio 8 (2.2; 2.3; 2.6)

En un problema de clasificación binaria se sabe que las observaciones presentan distribuciones discretas de Bernoulli con parámetros p_0 y p_1 ($0 < p_0 < p_1 < 1$):

$$P_{X|H}(x|0) = \begin{cases} p_0 & x = 1 \\ 1 - p_0 & x = 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad P_{X|H}(x|1) = \begin{cases} p_1 & x = 1 \\ 1 - p_1 & x = 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para la toma de la decisión se dispone de un conjunto de K observaciones independientes y tomadas bajo la misma hipótesis: $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$. Se define el siguiente estadístico de las observaciones: $T = \sum_{k=1}^{K} X^{(k)}$, i.e., la variable aleatoria T es igual al número de observaciones que son igual a la unidad.

(a) Obténgase el decisor ML basado en el conjunto de observaciones $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{K}$. Exprésese el resultado en función de la v.a. T.

(b) Sabiendo que la media y la varianza de una distribución Bernoulli con parámetro p valen p y $p(1-p)$, respectivamente, determínense las medias y varianzas del estadístico T bajo ambas hipótesis: m_0 y v_0 (para $H = 0$) y m_1 y v_1 (para $H = 1$).

Considérese para el resto del ejercicio $p_0 = 1 - p_1$.
Para K suficientemente grande, se decide aproximar la v.a. T mediante una distribución Gaussiana, tomando las medias y varianzas calculadas en el apartado anterior.

(c) Calcúlense las P_{FA} y P_{M} del decisor de umbral

$$t \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$$

en función del valor de η. Exprésese el resultado utilizando la función:

$$F(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

(d) Represéntese de forma aproximada la curva ROC del decisor anterior, indicando:
- Cómo se desplaza el punto de trabajo al aumentar η.
- Cómo se modificaría la curva ROC si creciese el número de observaciones disponibles (K).
- Cómo varía la curva ROC si el valor de p_1 crece (manteniendo la condición $p_0 = 1 - p_1$).

Solution:

(a) $$t \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{K \ln \dfrac{1-p_1}{1-p_0}}{\ln \dfrac{1-p_1}{1-p_0} - \ln \dfrac{p_1}{p_0}} = \eta$$

(b) $$m_0 = Kp_0 \qquad m_1 = Kp_1$$
$$v_0 = Kp_0(1-p_0) \qquad v_1 = Kp_1(1-p_1)$$

(c) $$P_{\text{FA}} = F\left(\frac{\eta - K(1-p_1)}{\sqrt{Kp_1(1-p_1)}}\right) \qquad P_{\text{M}} = 1 - F\left(\frac{\eta - Kp_1}{\sqrt{Kp_1(1-p_1)}}\right)$$

(d) Se tiene que si $\eta \to -\infty$, $P_{\mathrm{FA}} = 0$ y $P_{\mathrm{D}} = 0$ y si $\eta \to \infty$, $P_{\mathrm{FA}} = 1$ y $P_{\mathrm{D}} = 1$.
Al aumentar K, aumenta el area bajo la curva ROC.
Al disminuir p_1, aumenta el area bajo la curva ROC.

Ejercicio 9 (2.3; 2.6)

Se tiene un problema de decisión binaria definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|0) = G\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|1) = G\left(\mathbf{m}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

siendo $\mathbf{m} = [m,m]^T$, con $m > 0$ y $|\rho| < 1$.

(a) Sabiendo que $P_H(0) = P_H(1)$, obténgase el decisor bayesiano de mínima probabilidad de error. Represéntese en el plano $X_1 - X_2$ la frontera de decisión obtenida.

(b) Sobre el clasificador obtenido en a), compruébese que $Z = X_1 + X_2$ es un estadístico suficiente para la decisión. Obténganse las verosimilitudes de $H = 0$ y $H = 1$ sobre la variable aleatoria Z, $p_{Z|H}(z|0)$ y $p_{Z|H}(z|1)$.

(c) Calcúlense las probabilidades de falsa alarma, de pérdida y de error del decisor anterior; exprésense estas probabilidades utilizando la función

$$F(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

(d) Analícese cómo varía la probabilidad de error con el valor de ρ; para ello, considérense los casos $\rho = -1$, $\rho = 0$ y $\rho = 1$. Indíquese sobre el plano $X_1 - X_2$, para cada valor de ρ, cómo se distribuyen las verosimilitudes, y represéntese la frontera de decisión.

Solution:

(a) $x_1 + x_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} m$

(b) $t \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} m$

$p_{Z|H}(z|0) = G\left(0, 2(1+\rho)\right) \qquad p_{Z|H}(z|1) = G\left(2m, 2(1+\rho)\right)$

(c) $P_{\mathrm{FA}} = P_{\mathrm{M}} = P_{\mathrm{e}} = 1 - F\left(\dfrac{m}{\sqrt{2(1+\rho)}}\right)$

(d) Si $\rho \to -1:\ P_{\mathrm{e}} = 0$ Si $\rho = 0:\ P_{\mathrm{e}} = 1 - F\left(\dfrac{m}{\sqrt{2}}\right)$ Si $\rho \to 1:$

$P_{\mathrm{e}} = 1 - F\left(\dfrac{m}{2}\right)$

Ejercicio 10 (2.2; 2.4)

Considérese el problema de decisión binaria descrito por:

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|0) = \begin{cases} \alpha x_2 & 0 < x_1 < \frac{1}{4} \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|1) = \begin{cases} \beta x_1 & 0 < x_1 < 1 \quad 0 < x_2 < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Tras obtener los valores de las constantes α y β, represéntense las regiones de decisión correspondientes a un decisor LRT. Indíquese cómo varían las regiones de decisión en función del umbral del clasificador. ¿Existe algún valor de dicho umbral para el que el clasificador obtenido sea lineal?

(b) Obténganse las densidades de probabilidad marginales de x_1 y x_2 bajo ambas hipótesis ($H = 0$ y $H = 1$). ¿Qué relación estadística existe entre X_1 y X_2?

(c) Por sencillez, se decide utilizar un detector de umbral basado en una única observación, de X_1 o de X_2:

$$\text{DEC1:} \quad x_1 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta_1 \qquad\qquad \text{DEC2:} \quad x_2 \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \eta_2$$

Calcúlense las probabilidades de falsa alarma y de detección de los clasificadores DEC1 y DEC2, expresándolas en función de los umbrales de dichos decisores: η_1 y η_2, respectivamente.

(d) Dibújense las curvas características de operación (ROC) (i.e., las curvas que representan P_{D} en función de P_{FA}) correspondientes a los decisores DEC1 y DEC2, y discútase cómo cambia el punto de operación de cada clasificador al modificar el valor del umbral correspondiente.

(e) A la luz de los resultados obtenidos, ¿puede concluirse que alguno de los dos decisores propuestos, DEC1 o DEC2, sea superior al otro?.

Solution:

(a) $\alpha = 8$ y $\beta = 4$.

Donde $p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|0)$ o $p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|1)$ son nulas se decide la hipótesis contraria. En la región donde ambas hipótesis no son nulas, considerando el LRT dado por $\frac{p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|0)}{p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|1)} \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \eta$, el decisor es:

$$2x_2 - \eta x_1 \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} 0$$

Para $\eta = 4$ la frontera es lineal.

(b) Las observaciones son independientes entre sí bajo ambas hipótesis.

$$p_{X_1|H}(x_1|0) = 4, \quad 0 < x_1 < \frac{1}{4} \qquad p_{X_2|H}(x_2|0) = 2x_2, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$p_{X_1|H}(x_1|1) = 2x_1, \quad 0 < x_1 < 1 \qquad p_{X_2|H}(x_2|1) = 2, \quad 0 < x_2 < \frac{1}{2}$$

(c) DEC1: $\begin{cases} P_{\mathrm{FA}} = \begin{cases} 1-4\eta_1, & 0<\eta_1<1/4 \\ 0, & 1/4<\eta_1<1 \end{cases} \\ P_{\mathrm{D}} = 1-\eta_1^2, \quad 0<\eta_1<1 \end{cases}$ DEC2: $\begin{cases} P_{\mathrm{FA}} = \eta_2^2, \quad 0<\eta_2<1 \\ P_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 2\eta_2, & 0<\eta_2<1/2 \\ 1, & 1/2<\eta_2<1 \end{cases} \end{cases}$

(d) DEC1: $\eta_1 = 1$ estamos en el punto $P_{\mathrm{FA}} = 0$ y $P_{\mathrm{D}} = 0$, y si $\eta_1 = 0$ estamos en el punto $P_{\mathrm{FA}} = 1$ y $P_{\mathrm{D}} = 1$.
DEC2: $\eta_2 = 1$ estamos en el punto $P_{\mathrm{FA}} = 1$ y $P_{\mathrm{D}} = 1$, y si $\eta_2 = 0$ estamos en el punto $P_{\mathrm{FA}} = 0$ y $P_{\mathrm{D}} = 0$.

(e) No puede afirmarse que ninguno de los dos sea siempre mejor que el otro.

Ejercicio 11 (2.1)

Se conocen las d.d.p. de tres variables aleatorias independientes:

$$p(x_1) = \begin{cases} 1 & 0<x_1<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$p(x_2) = 2\exp(-2x_2) \quad x_2>0$$

$$p(x_3) = 2\exp(2(x_3-1)) \quad x_3<1$$

Considerando las hipótesis:

$$\begin{array}{ll} H=1: & X=X_1 \\ H=2: & X=X_2 \\ H=3: & X=X_3 \end{array}$$

obténgase:

(a) el decisor bayesiano que minimiza el coste medio global cuando las tres hipótesis son equiprobables y la política de costes es $c_{ii}=0, i=1,2,3$ y $c_{ij}=c$ con $i\neq j$.

(b) las probabilidades de decidir $D=i$ dada la hipótesis $H=i$, i.e., $P(D=i|H=i)$ para $i=1,2,3$.

Considerando ahora el problema de decisión binaria dado por:

$$\begin{array}{ll} H=1: & X=X_1 \\ H=0: & X=X_2+X_3 \end{array}$$

obténgase:

(c) el correspondiente decisor ML.

(d) las probabilidades de falsa alarma, $P(D=1|H=0)$, y de pérdidas, $P(D=0|H=1)$.

Solution:

(a)
$$\begin{array}{ll} D=2: & 0<x<0.34 \text{ y } x>1 \\ D=1: & 0.34<x<0.65 \\ D=3: & 0.65<x<1 \text{ y } x<0 \end{array}$$

(b) $P(D=1|H=1)=0.31$, $P(D=2|H=2)=0.6353$ y $P(D=3|H=3)=0.6353$

(c) $\begin{array}{ll} D=0: & x<0 \text{ y } x>1 \\ D=1: & 0<x<1 \end{array}$

(d) $P_{\text{FA}}=P(D=1|H=0)=0.4323$ y $P_{\text{M}}=P(D=0|H=1)=0$

Ejercicio 12 (2.2)

Considérese el problema de decisión descrito por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X|H}(x|0)=\begin{cases}\frac{2}{a^2}x & 0<x<a\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases} \qquad p_{X|H}(x|1)=\begin{cases}\frac{1}{a} & 0<x<a\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Represéntese la curva característica de operación (P_{D} vs P_{FA}) del decisor LRT con un umbral genérico η. Represéntese sobre dicha curva el punto de trabajo del decisor de máxima verosimilitud.

Solution: La curva ROC viene dada por la siguiente ecuación: $P_{\text{FA}}=P_{\text{D}}^2$.
El punto de trabajo del decisor ML es: $P_{\text{D}}=\frac{1}{2}$ y $P_{\text{FA}}=\frac{1}{4}$

Ejercicio 13 (2.2; 2.6)

Un sistema genera dos observaciones, X_1 y X_2, que, tanto bajo hipótesis $H=0$ como $H=1$, son independientes e idénticamente distribuidas, siendo

$$\begin{array}{ll} p_{X_i|H}(x_i|1)=2x_i & 0<x_i<1\\ p_{X_i|H}(x_i|0)=2(1-x_i) & 0<x_i<1\end{array}$$

Suponga hipótesis equiprobables.

(a) Determine el decisor MAP basado en X_1 y calcule su probabilidad de error.

Sea DMAP1 el decisor del apartado a), suponga que si $|x_1-0.5|<a$ (siendo $0<a<0.5$), se observa X_2 y, con objeto de seguir aplicando decisión por umbral, se descartan X_1 y la decisión de DMAP1. En su lugar, se aplica un segundo decisor, basado en X_2 y también MAP, que llamaremos DMAP2.

(b) Represente gráficamente sobre el plano X_1-X_2, para un valor de a arbitrario, las regiones de decisión del esquema conjunto DMAP1-DMAP2.

(c) Determine la probabilidad de error global del esquema conjunto DMAP1-DMAP2.

(d) Determine la máxima reducción de la probabilidad de error global que puede conseguirse utilizando el esquema conjunto, respecto al decisor DMAP1.

(e) Compare las prestaciones del decisor conjunto DMAP1-DMAP2 con las del decisor MAP que utiliza simultáneamente X_1 y X_2.

Solution:

(a) $x_1 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{1}{2} \qquad P_{\text{e}} = \frac{1}{4}$

(b) $\begin{array}{ll} D=0: & x_1 < 1/2 - a \quad \text{y} \quad 1/2 - a < x_1 < 1/2 + a,\ x_2 < 1/2 \\ D=1: & 1/2 - a < x_1 < 1/2 + a,\ x_2 > 1/2 \quad \text{y} \quad x1 > 1/2 + a \end{array}$

(c) $P_{\text{e}} = a^2 - 0.5a + 0.25$

(d) La variación máxima de la probabilidad de error es $\frac{1}{16}$

(e) DMAP(X_1 y X_2): $P_{\text{e}} = \frac{1}{6}$

DMAP1- DMAP2: P_{e} varía de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{16}$

Ejercicio 14 (2.2)

Considérese el problema de decisión binaria descrito por:

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1, x_2|i) = a_i^2 \exp\left(-a_i\left(x_1 + x_2\right)\right) \quad x_1, x_2 > 0 \quad i = 0, 1$$

donde $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

(a) Diséñese el decisor MAP correspondiente en función del parámetro $R = P_H(1)/P_H(0)$.

(b) Compruébese que $T = X_1 + X_2$ es un estadístico suficiente y calcúlense las verosimilitudes de dicho estadístico, $p_{T|H}(t|i)$, $i = 0, 1$.

(c) Calcúlense las probabilidades de falsa alarma, de pérdida y de error del decisor diseñado en (a).

Solution:

(a) $\begin{array}{ll} D=1: & x_1 + x_2 < \ln(4R) \\ D=0: & x_1 + x_2 > \ln(4R) \end{array}$

(b) $\begin{array}{ll} D=1: & t < \ln(4R) \\ D=0: & t > \ln(4R) \end{array}$

$p_{T|H}(t|0) = t\exp\left(-t\right), \quad t > 0 \qquad p_{T|H}(t|1) = 4t\exp\left(-2t\right), \quad t > 0$

(c) $P_{\text{FA}} = 1 - \frac{1 + \ln(4R)}{4R} \qquad P_{\text{M}} = \frac{1 + 2\ln(4R)}{(4R)^2} \qquad P_{\text{e}} = P_H(0)\left(1 - \frac{3}{16R} - \frac{1}{8R}\ln(4R)\right)$

Ejercicio 15 (2.3)

Considérese el problema bidimensional binario Gaussiano

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1, x_2|0) = G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1, x_2|1) = G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Las probabilidades de las hipótesis son $P_H(0) = 2/3$ y $P_H(1) = 1/3$, y los costes asociados son $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{01} = c_{10} = 1$.

(a) Establézcase la expresión que proporciona el correspondiente decisor Bayesiano en función del vector de observaciones $\mathbf{X}$.

(b) Represéntese cómo se desplaza la frontera de decisión al variar el valor de $P_H(0)$.

Solution:

(a) $x_2 - x_1 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 10 \ln 2$

(b) Si aumenta $P_H(0)$ la frontera se mueve hacia el punto $[0,1]^T$ y si disminuye $P_H(0)$ la frontera se mueve hacia el punto $[1,0]^T$.

Ejercicio 16 (2.2; 2.4)

Considérese un escenario de decisión radar en el que se sabe que los blancos que se desea detectar pueden causar ecos con dos niveles diferentes de intensidad:

$$\begin{array}{ll} H=0 \text{ (no hay blanco):} & X = N \\ H=1 \text{ (hay blanco):} & \begin{cases} H=1a: & X = s_1 + N \\ H=1b: & X = s_2 + N \end{cases} \end{array}$$

donde los valores reales s_1 y s_2 son los dos niveles de eco conocidos para cada tipo de blanco, y N es una v.a. con distribución $G(0,1)$. Se sabe, además, que $P_H(1a|1) = P$ y $P_H(1b|1) = 1 - P$ $(0 < P < 1)$.

(a) Establézcase la forma general del test de razón de verosimilitudes que permite discriminar $H = 0$ frente a $H = 1$, y justifíquese que si los signos de s_1 y s_2 coinciden, dicho detector es un detector de un único umbral.

(b) ¿Existen combinaciones de valores de s_1 y s_2 para los que un test de máxima verosimilitud decida siempre la misma hipótesis?

(c) Asumiendo $s_2 < s_1 < 0$ y el siguiente detector de umbral:

$$x \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \eta$$

determínense P_{FA} y P_{D} en función de η y exprese su resultado utilizando la función:

$$F(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Represéntese de forma aproximada la curva ROC (P_{D} vs P_{FA} en función de η) del detector, situando sobre la misma los puntos correspondientes a $\eta \to \pm\infty$, e indicando cómo varía el punto de trabajo en función del umbral.

(d) Explíquese qué efectos tendrían sobre la ROC:

- aumentar s_1.
- disminuir s_2.
- aumentar P.
- aumentar $P_H(0)$.

Solution:

(a) $$P\exp\left(-\frac{1}{2}\left(s_1^2-2s_1x\right)\right)+(1-P)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(s_2^2-2s_2x\right)\right)\ \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}}\ \eta$$

(b) No

(c) $P_{\mathrm{FA}}=F(\eta), \qquad P_{\mathrm{D}}=1-PF(\eta-s_1)-(1-P)F(\eta-s_2)$

(d)
- aumentar s_1: disminuye el area de la ROC
- disminuir s_2: aumenta el area de la ROC
- aumentar P: disminuye el area de la ROC
- aumentar $P_H(0)$: no afecta

Ejercicio 17 (2.2; 2.5)

Considérese el problema de decisión binaria descrito por

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|0) &= a_0x^2 && |x|<1 \\ p_{X|H}(x|1) &= a_1\left(3-|x|\right) && |x|<3 \end{aligned}$$

donde a_0 y a_1 son constantes, las probabilidades de las hipótesis son iguales y los costes $c_{00}=c_{11}=0$, $c_{10}=c_{01}=c$ para $c>0$.

(a) Calcúlense las constantes a_0 y a_1.
(b) Determínese el decisor correspondiente.
(c) Calcúlese la probabilidad de error de ese decisor.
(d) Diséñese el decisor Neyman-Pearson que garantiza una P_{FA} no superior a un valor dado α.

Solution:

(a) $a_0=3/2$ y $a_1=1/9$.

(b) $$\begin{aligned} D=1: &\quad |x|<0.43 \text{ y } |x|>1 \\ D=0: &\quad 0.43<|x|<1 \end{aligned}$$

(c) $P_{\mathrm{e}}=0.184$.

(d) $$\begin{aligned} D=1: &\quad |x|<\alpha^{1/3} \text{ y } |x|>1 \\ D=0: &\quad \alpha^{1/3}<|x|<1 \end{aligned}$$

Ejercicio 18 (2.2)

Considere el problema de decisión binaria especificado por los costes $c_{00}=c_{11}=0$, $c_{01}=c_{10}=1$,

$$\begin{aligned} p_{X|H}(x|0) &= \lambda_0\exp\left(-\lambda_0x\right) && x\geq 0 \\ p_{X|H}(x|1) &= \lambda_1\exp\left(-\lambda_1x\right) && x\geq 0 \end{aligned}$$

siendo $\lambda_0=2\lambda_1$.

(a) Diseñe el decisor de mínimo coste medio suponiendo $P_H(1)=1/2$.
(b) Determine las probabilidades P_{FA} y P_{M} del decisor obtenido en (a).

(c) Suponiendo que el verdadero valor de $P_H(1)$ es $P > 0$, represente gráficamente el riesgo del detector obtenido en a) en función de P.

(d) Se aplica la decisión anterior a dos observaciones independientes. Determine la probabilidad de cometer exactamente 0, 1 y 2 errores, en función de P.

(e) Suponga que el riesgo asociado a las dos decisiones no es la suma de los costes de cada decisión, sino que

- El coste de acertar en ambas decisiones es 0.
- El coste de cometer un solo error es 1.
- El coste de cometer 2 errores es $c = 18$.

Represénte gráficamente el valor medio del riesgo total en función de P.

Solution:

(a) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \dfrac{1}{\lambda_1} \ln 2$

(b) $P_{\mathrm{FA}} = 0.25 \qquad P_{\mathrm{M}} = 0.5$

(c) $R = (1+P)/4$

(d) $P\{0 \text{ errores}\} = \dfrac{1}{16}(3-P)^2$

$P\{1 \text{ error}\} = 2 \cdot \dfrac{1}{4}(1+P) \cdot \dfrac{1}{4}(3-P)$

$P\{2 \text{ errores}\} = \dfrac{1}{16}(1+P)^2$

(e) El riesgo de dos decisiones es: $P^2 + \dfrac{5}{2}P + \dfrac{3}{2}$.

Ejercicio 19 (2.2)

Los clientes de una compañía de seguros se dividen en dos clases, clientes prudentes ($H = 0$) y clientes temerarios ($H = 1$). La probabilidad de que un cliente prudente tenga k accidentes en un año se modela como una distribución de Poisson de parámetro unidad:

$$p_{K|H}(k|0) = \frac{\exp(-1)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mientras que en el caso de los clientes temerarios esta probabilidad se modela como una distribución de Poisson de parámetro 4:

$$p_{K|H}(k|1) = \frac{4^k \exp(-4)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(donde se considera 0!=1)..

(a) Diséñe un decisor de máxima verosimilitud que detecte si un cliente es prudente o temerario en función del número de accidentes que ha sufrido durante el primer año.

(b) Las prestaciones del decisor diseñado en el apartado anterior se pueden evaluar en función de dos parámetros:

- el porcentaje de clientes prudentes que se clasifican como temerarios;

- el porcentaje de clientes temerarios que se clasifiquen como prudentes y supongan pérdidas para la compañía;

Relacione esas cantidades con las probabilidades de falsa alarma, de detección, y calcule estas.

(c) Un estudio estadístico encargado por la compañía arroja que solamente uno de cada 17 clientes es temerario. Calcule el decisor de menor probabilidad de error a la vista de esta nueva información. Compare este decisor con el diseñado en el apartado (a) en términos de probabilidad de error, de falsa alarma y de pérdida.

Solution:

(a) $k \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 2.16.$

(b) $P_{\mathrm{FA}} = 8\,\%$ (es el porcentaje de clientes prudentes que abandonan la compañía).
$P_{\mathrm{D}} = 76.2\,\%$ (es el porcentaje de clientes temerarios que se clasifican como tales)

(c) $k \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 4.16$. $P_{\mathrm{FA}} = 0.37\,\%$. $P_{\mathrm{M}} = 37.11\,\%$ y $P_{\mathrm{e}} = 4\,\%$.

La P_{e} del decisor ML es $8.9\,\%$.

Ejercicio 20 (2.2)

Considere un problema de decisión binaria unidimensional con verosimilitudes $p_{X|H}(x|h)$ y probabilidades a priori $P_H(h)$, con $h \in \{0,1\}$ y $P_H(1) = 0.6$.

(a) Se sabe que $P_{H|X}(h|x) = P_H(h)$, para $h \in \{0,1\}$ y para todo x. Determine el decisor MAP.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de error del decisor obtenido en el apartado anterior?

(c) Ignore ahora la condición del apartado (a). Por contra, se sabe que las verosimilitudes son simétricas una de otra, es decir, $p_{X|H}(x|1) = p_{X|H}(-x|0)$, y que cierto decisor de la forma

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \mu$$

verifica $P_{FA} = P_M$. ¿Cuál es el valor de μ?.

(d) Proponga, mediante una fórmula o un dibujo, un ejemplo de verosimilitudes simétricas (como en el apartado anterior) para las que el decisor ML no es de tipo umbral, es decir, no puede expresarse en la forma

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \alpha$$

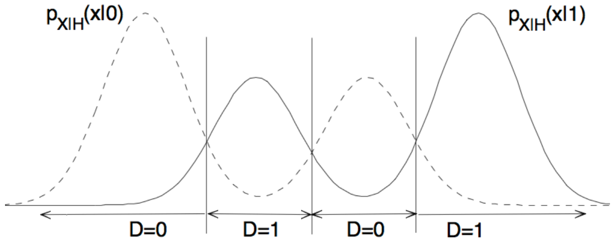
Solution:

(a) Siempre se decide $D = 1$.

(b) $P_\mathrm{e} = 0.4$

(c) $\mu = 0$

(d)



Ejercicio 21 (2.3; 2.4)

Considere un problema de decisión binaria con hipótesis equiprobables y observaciones caracterizadas por

$$\begin{aligned} H = 0: &\quad X = N_0 \\ H = 1: &\quad X = a + N_1 \end{aligned}$$

siendo a una constante conocida y N_0 y N_1 variables aleatorias gaussianas con distribuciones $N_0 \sim G(0, v_0)$ y $N_1 \sim G(0, v_1)$, respectivamente.

(a) Para $a > 0$, ilustre gráficamente las regiones de decisión que se obtendrían en los casos $v_0 > v_1$, $v_0 < v_1$ y $v_0 = v_1$.

(b) Considere para el resto del ejercicio $a = 0$, $v_0 = 1$ y $v_1 = 2$. Obtenga la regla de decisión que minimiza la probabilidad de error del decisor.

(c) Obtenga las probabilidades de falsa alarma y de detección que se obtienen al utilizar el decisor anterior. Exprese el resultado haciendo uso de la función

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

(d) Sobre una representación aproximada de la ROC de los decisores tipo LRT

$$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$$

indique cómo se desplazaría el punto de trabajo del decisor:

- al incrementar el umbral η del decisor.
- si crece la probabilidad a priori de la hipótesis $H = 1$.

Solution:

(a) Si $v_0 = v_1$ se obtendría un decisor de único umbral, sino se obtendrían tres regiones de decisión.

(b) $|x| \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \sqrt{2\ln 2} = x_u$

(c) $P_{\text{FA}} = 2F\left(x_u\right) \qquad P_{\text{D}} = 2F\left(\frac{-x_u}{\sqrt{2}}\right)$

(d) Si η crece disminuyen P_{FA} y P_{D}. Si $P_H(1)$ crece, manteniendo η constante, el punto de trabajo no varía.

Ejercicio 22 (2.3; 2.6)

Considere el problema de decisión binaria dado por las verosimilitudes

$$p_{\mathbf{X}|H}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} |H=0\right) \sim G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \qquad p_{\mathbf{X}|H}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} |H=1\right) \sim G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

(a) Obtenga la expresión del decisor ML y compruebe que para la toma de la decisión es suficiente conocer la variable $T = X_1 + X_2$.

(b) Obtenga las densidades de probabilidad $p_{T|H}(t|0)$ y $p_{T|H}(t|1)$.

(c) Calcule las probabilidades de falsa alarma y de pérdida a partir de las verosimilitudes obtenidas en el apartado anterior. Exprese el resultado haciendo uso de la función

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

Solution:

(a) $t = x_1 + x_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 1$

(b) $p_{T|H}(t|0) \sim G\left(0,2\right)$ y $p_{T|H}(t|1) \sim G\left(2,2\right)$.

(c) $P_{\text{FA}} = P_{\text{M}} = 1 - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ejercicio 23 (2.2; 2.4 ; 2.5)

Se tiene un problema de clasificación binaria definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X|H}(x|0) = 2\exp\left(-2x\right) \quad x > 0$$
$$p_{X|H}(x|1) = 1 \quad 0 < x < 1$$

(a) Obtenga el test de razón de verosimilitudes para un valor genérico del umbral η

$$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$$

(b) Calcule la probabilidad de falsa alarma y de pérdidas del decisor anterior en función de η

(c) Represente la curva característica de operación del decisor e indique sobre la misma los puntos de trabajo de:

- El decisor de máxima verosimilitud
- El decisor máximo a posteriori si $P_H(0) = 2P_H(1)$
- El decisor Neyman Pearson para $P_{FA} \leq 0.1$

(d) Considere ahora el siguiente decisor de umbral sobre la observación x

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta_u$$

y obtenga su probabilidad de falsa alarma y de pérdidas en función de η_u

(e) Represente la curva característica de operación del decisor de umbral anterior y compárela con la curva característica del decisor LRT. ¿Qué esquema de decisión (el obtenido mediante el LRT o mediante un test de umbral) presenta mejores prestaciones? Justifique su respuesta.

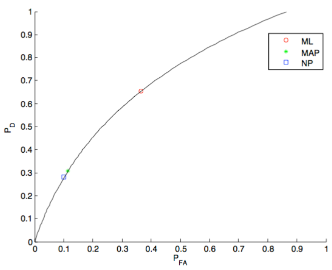
Solution:

(a) $\begin{cases} D = 1: & \eta' < x < 1 \\ D = 0: & 0 < x < \eta' \quad \text{y} \quad x > 1 \end{cases}$

donde $\eta' = \dfrac{1}{2}\ln 2\eta$ y $\eta' > 0$

(b) $P_{\text{FA}} = \begin{cases} \exp(-2\eta') - \exp(-2) & 0 < \eta' < 1 \\ 0 & \eta' > 1 \end{cases}$ $\qquad P_{\text{M}} = \begin{cases} \eta' & 0 < \eta' < 1 \\ 1 & \eta' > 1 \end{cases}$

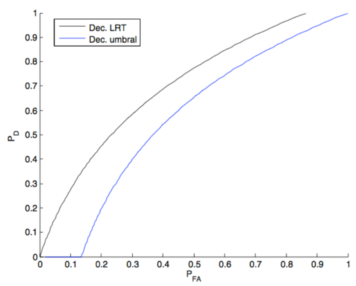
(c)



$$\begin{array}{lll} \text{ML}: & P_{\text{FA}} = \frac{1}{2} - \exp(-2) & P_D = 1 - \frac{1}{2}\ln 2 \\ \text{MAP}: & P_{\text{FA}} = \frac{1}{4} - \exp(-2) & P_D = 1 - \ln 2 \\ \text{N}-\text{P}: & P_{\text{FA}} = 0.1 & \end{array}$$

(d) $P_{\text{FA}} = \exp(-2\eta_u)$ $\qquad P_{\text{M}} = \begin{cases} \eta_u & 0 < \eta_u < 1 \\ 1 & \eta_u > 1 \end{cases}$

(e)



Como era de esperar la curva ROC del decisor LRT está por encima de la

ROC del decisor de umbral, por lo que confirmamos que el decisor LRT presenta mejores prestaciones.

Ejercicio 24 (2.2; 2.5)

Considere el problema de decisión binaria dado por las verosimilitudes

$$p_{X|H}(x|0) = n(1-x)^{n-1}, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$p_{X|H}(x|1) = nx^{n-1}, \qquad 0 \le x \le 1$$

siendo $n \ge 2$ un número natural.

(a) Determine las regiones de decisión de un decisor LRT, en función de su umbral, η.

(b) Determine, en función de n y η, las probabilidades de falsa alarma y pérdida.

(c) Determine el decisor minimax.

Solution:

(a) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \dfrac{\eta^{\frac{1}{n-1}}}{1+\eta^{\frac{1}{n-1}}}$

(b) $P_{\mathrm{FA}} = \left(\frac{1}{1+\eta^{\frac{1}{n-1}}}\right)^n$

$P_{\mathrm{M}} = \left(\frac{\eta^{\frac{1}{n-1}}}{1+\eta^{\frac{1}{n-1}}}\right)^n$

(c) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 25 (2.2)

Considere un problema de clasificación binaria caracterizado por $P_H(0) = P_H(1) = 1/2$, $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{01} = 9$, $c_{10} = 8$, y verosimilitudes

$$p_{X|H}(x|0) = 1 - \frac{x}{2}; \qquad 0 \le x \le 2$$

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{2}{3}; \qquad 0 \le x \le 3/2$$

(a) Considere un clasificador LRT genérico:

$$\frac{p_{X|H}(x|0)}{p_{X|H}(x|1)} \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \eta$$

Muestre gráficamente las regiones de decisión de dicho clasificador en el intervalo $x \in [0, 2]$, indicando cómo varían dichas regiones con η.

(b) Calcule P_{FA} y P_{D} para el clasificador LRT, expresándolas como función de η.

(c) Diseñe el clasificador ML, y calcule sus P_{FA} y P_{M}.

(d) Considere ahora el siguiente clasificador de umbral genérico:

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta'$$

Obtenga, en función de η', los valores de P_{FA} y P_{D}. Rellene la siguiente tabla particularizando las expresiones obtenidas para los valores indicados del umbral.

η'	0	0.5	1	1.5	2
P_{FA}					
P_{D}					

(e) Proporcione, en función del valor de η', la expresión del coste medio para la familia de clasificadores de umbral considerada en el apartado anterior. Encuentre el valor de η' que minimiza dicho coste medio.

Solution:

(a) Si $x > \frac{3}{2}$ siempre se decide $D = 0$. Si $x > \frac{3}{2}$ el decisor LRT queda:

$$x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 2 - \frac{4\eta}{3} = \mu$$

Que indica:

- Si $\eta > \frac{3}{2}$ ($\mu < 0$) siempre se decide $D = 1$.
- Si $\eta < \frac{3}{8}$ ($\mu > \frac{3}{2}$) siempre se decide $D = 0$.
- Si $\frac{3}{2} < \eta < \frac{3}{8}$, se decide $D = 0$ si $0 < x < \mu$ y $D = 1$ si $\mu < x < \frac{3}{2}$

(b) $P_{\text{FA}} = \dfrac{15}{16} - \mu + \dfrac{\mu^2}{4}$

$P_{\text{D}} = 1 - \dfrac{2\mu}{3}$

(c) Decisor ML ($\eta = 1$ y $\mu = \frac{2}{3}$): $P_{\text{M}} = \dfrac{4}{9}$ y $P_{\text{FA}} = \dfrac{55}{144}$

(d) Si $0 < \eta' < \frac{3}{2}$: $P_{\text{FA}} = 1 - \eta' + \dfrac{\eta'^2}{4}$ y $P_{\text{D}} = 1 - \dfrac{2\eta'}{3}$

Si $\frac{3}{2} < \eta' < 2$: $P_{\text{FA}} = 1 - \eta' + \dfrac{\eta'^2}{4}$ y $P_{\text{D}} = 0$

η'	0	0.5	1	1.5	2
P_{FA}	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0
P_{D}	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0

(e) $\mathbb{E}\{c_{DH}\} = [\eta' - 2]^2 + 3\eta'$, si $0 < \eta' < \dfrac{3}{2}$

$\mathbb{E}\{c_{DH}\} = [\eta' - 2]^2 + \dfrac{9}{2}$, si $\eta' > \dfrac{3}{2}$

$\eta'^{*} = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 26 (2.3; 2.6)

Se tiene un problema de decisión binaria definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|0) = G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$p_{X_1,X_2|H}(x_1,x_2|1) = G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

siendo $|\rho| < 1$.

(a) Obtenga el decisor de máxima verosimilitud.

(b) Considere la v.a. $Z = X_1 - \rho X_2$ y obtenga las verosimilitudes de $H = 0$ y $H = 1$ sobre dicha v.a., $p_{Z|H}(z|0)$ y $p_{Z|H}(z|1)$.

(c) Considerando los resultados de los apartados anteriores, calcule las probabilidades de falsa alarma y de pérdida del decisor diseñado en (a); exprese estas probabilidades utilizando la función

$$F(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Solution:

(a) $X_1 - \rho X_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 0$

(b) $p_{Z|H}(z|0) = G\left(-1, 1-\rho^2\right)$ $\qquad p_{Z|H}(z|1) = G\left(1, 1-\rho^2\right)$

(c) $P_{\text{FA}} = P_{\text{M}} = F\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$

Ejercicio 27 (2.1; 2.2; 2.5)

Considere un problema de decisión binaria con hipótesis equiprobables basado en la observación de una variable aleatoria X, con verosimilitudes.

$$p_{X|H}(x|0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$p_{X|H}(x|1) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Calcule la probabilidad de error del decisor MAP.

(b) Determine el decisor Neyman-Pearson de probabilidad de falsa alarma $P_{\text{FA}} \le 1/4$.

(c) Ahora suponga que la variable aleatoria hipótesis puede tomar un tercer valor $H = 2$, con verosimilitud

$$p_{X|H}(x|2) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para el caso de que las 3 hipótesis sean equiprobables y se aplique una política de costes

$$c_{00} = c_{11} = c_{22} = 0, c_{02} = c_{10} = c_{12} = c_{20} = 1, c_{01} = c_{21} = 2$$

donde c_{dh} es el coste de decidir $D = d$ cuando la hipótesis correcta es $H = h$, calcule el coste medio de tomar cada decisión a la vista de X, es decir, calcule

$$\mathbb{E}\{c_{0,H}|x\},\ \mathbb{E}\{c_{1,H}|x\} \text{ y } \mathbb{E}\{c_{2,H}|x\}$$

(d) Represente los costes medios calculados en el apartado anterior como funciones de la observación x y determine las regiones del decisor de mínimo coste medio.

Solution:

(a) $P_\mathrm{e} = \dfrac{3}{8}$

(b) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \dfrac{3}{4}$

(c) $\mathbb{E}\{c_{0,H}|x\} = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$ $\quad \mathbb{E}\{c_{1,H}|x\} = 1 - \dfrac{2}{3}x$ $\quad \mathbb{E}\{c_{2,H}|x\} = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$

(d) $\begin{cases} D = 2 & 0 \le x \le \dfrac{1}{3} \\ D = 1 & \dfrac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}$

Ejercicio 28 (2.2)

Considere el problema de decisión binaria dado por la observación $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y verosimilitudes

$$p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|1) = \exp(-x_1 - x_2), \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$p_{\mathbf{X}|H}(\mathbf{x}|0) = 2, \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1 + x_2 \le 1$$

siendo $P_H(1) = 4/5$.

(a) Determine el decisor ML.
(b) Determine el decisor MAP.
(c) Determine la probabilidad de error del decisor ML.
(d) Determine la probabilidad de falsa alarma del decisor MAP.

Solution:

(a) $x_1 + x_2 \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} 1$

(b) Decide $D = 0$ si $\ln(2) < x_1 + x_2 < 1$, decide $D = 1$ en caso contrario.

(c) $P_e = (1 - 2e^{-1})/5$

(d) $P_{\mathrm{FA}} = \ln(2)^2$

Ejercicio 29 (2.2)

Considere un problema de decisión binaria con hipótesis equiprobables definido por las siguientes verosimilitudes:

$$p_{X_1|H}(x_1|0) = \begin{cases} 2x_1, & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$p_{X_1|H}(x_1|1) = \begin{cases} 2(1-x_1), & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se sabe que los costes de acertar son nulos mientras que los de equivocarse unitarios ($c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$).

(a) Obtenga la familia de decisores LRT de la forma

$$\frac{p_{X_1|H}(x_1|0)}{p_{X_1|H}(x_1|1)} \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \eta$$

y calcule su probabilidad de falsa alarma P_{FA} y de pérdida P_{M} en función de η.

(b) A partir del resultado anterior obtenga la probabilidad de falsa alarma P_{FA} y de pérdida P_{M} del decisor bayesiano, así como la probabilidad de pérdida del decisor de Neyman Pearson para una probabilidad de falsa alarma de 0.01.

(c) Se desea mejorar las prestaciones del decisor bayesiano proporcionado por la observación X_1 y para ello se recurre a medir una nueva variable X_2 que tiene, bajo cada hipótesis, la siguiente distribución:

$$p_{X_2|H}(x_2|0) = \begin{cases} 3x_2^2, & 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$p_{X_2|H}(x_2|1) = \begin{cases} 3(1-x_2)^2, & 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtenga la probabilidad de falsa alarma P_{FA} y de pérdida P_{M} del decisor bayesiano basado en X_2.

(d) Se desea analizar el *riesgo total* de cada uno de los decisores bayesianos propuestos, definido como suma del riesgo del decisor (r_{ϕ_i}) más el coste medio C_i de obtener la observación X_i, es decir,

$$R_{\text{TOTi}} = r_{\phi_i} + C_i.$$

Sabiendo que medir la observación X_1 tiene un coste nulo, mientras que medir X_2 tiene un coste medio a, indique para que valores de a el esquema de decisión basado sólo en X_1 o el basado sólo en X_2 proporciona un menor riesgo total.

Solution:

(a) $x_1 \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \dfrac{\eta}{1+\eta} = \eta'$

$P_{\text{FA}} = \eta'^2$ y $P_{\text{M}} = (1-\eta')^2$

(b) Decisor Bayesiano: $P_{\text{FA}} = \frac{1}{4}$ y $P_{\text{M}} = \frac{1}{4}$
Decisor N-P: $P_{\text{FA}} = 0.01$ y $P_{\text{M}} = 0.81$

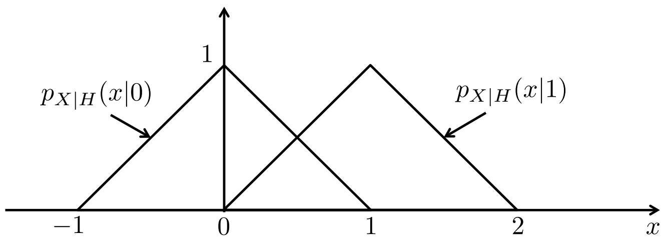
(c) $x_2 \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} \frac{1}{2}$

$P_{\text{FA}} = \frac{1}{8}$ y $P_{\text{M}} = \frac{1}{8}$

(d) $R_{\text{TOT1}} = \frac{1}{4}$ y $R_{\text{TOT2}} = \frac{1}{8} + a$
Si $a < \frac{1}{8}$, $R_{\text{TOT2}} < R_{\text{TOT1}}$. Y si $a > \frac{1}{8}$, $R_{\text{TOT2}} > R_{\text{TOT1}}$.

Ejercicio 30 (2.2; 2.4)

Se tiene un problema de decisión binaria definido por las verosimilitudes representadas en la siguiente figura:



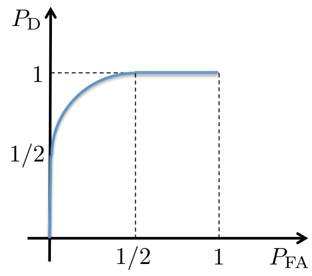
(a) Obtenga una expresión para las regiones de decisión de un decisor LRT genérico.

(b) Obtenga las probabilidades de falsa alarma y de pérdida y represente la curva ROC.

Solution:

(a) $$\begin{cases} -1 \le x \le 0 & D = 0 \\ 0 \le x \le 1 & x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \dfrac{\eta}{1+\eta} = \nu \\ 1 \le x \le 2 & D = 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} -1 \le \nu \le 0 & P_{\text{M}} = 0 \\ 0 < \nu < 1 & P_{\text{FA}} = \frac{1}{2}(1-\nu)^2 \quad P_{\text{M}} = \frac{1}{2}\nu^2 \\ 1 \le \nu \le 2 & P_{\text{FA}} = 0 \end{cases}$$



Ejercicio 31 (2.2; 2.5)

Considere el problema de decisión binaria dado por hipótesis equiprobables y verosimilitudes

$$p_{x|H}(x|1) = x \exp(-x), \qquad x \geq 0 \tag{1}$$

$$p_{x|H}(x|0) = \exp(-x), \qquad x \geq 0 \tag{2}$$

(a) Determine, en función de η, las regiones de decisión del decisor LRT de parámetro η.

(b) Determine, en función de η, las probabilidades de falsa alarma y de pérdida del decisor LRT.

(c) Determine la probabilidad de detección del detector de Neyman Pearson dado por $P_{\mathrm{FA}} \leq e^{-1}$.

(d) Determine la probabilidad de error condicionada a la observación, $P\{D \neq H|x\}$, del decisor LRT de parámetro η

Solution:

(a) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta$

(b) $P_{\mathrm{FA}} = e^{-\eta}$, $P_{\mathrm{FA}} = 1 - (1+\eta)e^{-\eta}$

(c) $P_{\mathrm{D}} = 2e^{-1}$

(d) $P\{D \neq H|x\} = \left[\begin{array}{ll} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x < \eta \\ \frac{1}{1+x}, & \text{si } x > \eta \end{array} \right.$

Ejercicio 32 (Decisión MAP binaria)

Considere el problema de decisión binaria dado por la observación $X \in [0, 2]$ y verosimilitudes

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{1}{2}x$$

$$p_{X|H}(x|0) = \frac{3}{4}x(2-x)^2,$$

siendo $P_H(1) = \dfrac{2}{5}$.

(a) Determine el decisor MAP.

(b) Determine la probabilidad de pérdida del decisor MAP.

(c) Suponga ahora que el mismo decisor que se ha obtenido en el apartado (a) se aplica a un escenario en el que la verosimilitud de $H = 1$ es

$$p'_{X|H}(x|1) = \frac{7}{8} p_{X|H}(x|1) + \frac{1}{16},$$

mientras que la verosimilitud de $H = 0$ sigue siendo la misma. Determine el incremento en la probabilidad de error que se produce como consecuencia de este cambio de escenario.

Solution:

(a) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{4}{3}$

(b) $P_{\mathrm{M}} = \frac{4}{9}$

(c) Dado que la P_{FA} no cambia y $P'_{\mathrm{M}} = \frac{17}{36}$, el incremento de la probabilidad de error es $P_H(1)(P'_{\mathrm{M}} - P_{\mathrm{M}}) = \frac{1}{90}$

Ejercicio 33 (Decisión ML)

Se toma una medida de la tensión intantánea X existente en un momento dado en un nodo de un circuito. Bajo la hipótesis nula $H = 0$, en dicho nodo sólo existe ruido gaussiano de media nula y varianza v. Bajo la hipótesis $H = 1$ en dicho nodo existe únicamente una señal sinusoidal de media nula y amplitud $\sqrt{v}$. Dado que se desconoce la frecuencia de la señal sinusoidal y el instante en el que se toma la medida, se tiene que bajo $H = 1$ se mide $X = \sqrt{v}\cos\Phi$, con Φ una v.a. uniforme entre 0 y 2π.

(a) Calcule las verosimilitudes de ambas hipótesis.

(b) Calcule el decisor de máxima verosimilitud para discernir entre ellas.

(c) Use la función $h(a) = a - \log(1-a)$ para expresar el decisor anterior y calcule las regiones de decisión en función de v y $h^{-1}(\cdot)$.

(d) Calcule la probabilidad de falsa alarma usando dicho decisor en función de $h^{-1}(\cdot)$ y $Q(z)$.

Ayudas:

$$\frac{d\cos u}{du} = -\sin u \quad \frac{d\arccos u}{du} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \frac{d\sin u}{du} = \cos u \quad \frac{d\arcsin u}{du} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

Suponga conocida la función $Q(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Suponga conocida la función $a = h^{-1}(\cdot)$ (función recíproca de $h(\cdot)$).

Solution:

(a) $p_{X|H}(x|0) = G(x|0, v)$, $p_{X|H}(x|1) = \frac{1}{\pi\sqrt{v-x^2}} \quad \forall_{x\in[-\sqrt{v},\sqrt{v}]}$

(b) $h(\frac{x^2}{v}) \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \log\frac{\pi}{2}$ si $x^2 < v$, $D = 0$ en otro caso.

(c) $h^{-1}(\log\frac{\pi}{2}) = \frac{x^2}{v} = 0.2126 \approx 0.21 \Rightarrow$
$D_0 : -\infty < x < -\sqrt{v} \,\cup\, -\sqrt{0.21v} < x < +\sqrt{0.21v} \,\cup\, +\sqrt{v} < x < +\infty$
$D_1 : -\sqrt{v} < x < -\sqrt{0.21v} \,\cup\, +\sqrt{0.21v} < x < +\sqrt{v}$

(d) $P_{\text{FA}} = 2(Q(1) - Q(\sqrt{0.21}))$

Ejercicio 34 (Decisión bayesiana)

Considere el problema de decisión binario dado por las verosimilitudes:

$$p_{X|H}(x|0) = \exp(-x), \qquad x > 0$$
$$p_{X|H}(x|1) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\exp(-\tfrac{x^2}{2}), \qquad x > 0$$

Sabiendo que $P_H(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} P_H(1)$ y $c_{00} = c_{11} = 0$, $c_{10} = \exp\left(\dfrac{1}{2}\right) c_{01}$:

(a) Determine las regiones de decisión del decisor MAP.

(b) Calcule la probabilidad de error del decisor MAP. Exprese su resultado utilizando la función:
$$F(x) = 1 - Q(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

(c) Determine las regiones de decisión del decisor bayesiano de mínimo coste medio.

(d) Calcule la probabilidad de error del decisor obtenido en el apartado anterior.

Solution:

(a) $x \underset{D=1}{\overset{D=0}{\gtrless}} 2$

$$P_e = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-\exp(-2)) + 2 - 2F(2)\right]$$

(b) Siempre se decide $D = 0$, $P_e = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1}$

Ejercicio 35 (Decisión no bayesiana)

Considere el problema de decisión dado por las verosimilitudes:

$$p_{X|H}(x|1) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \qquad 0 < x < 1$$
$$p_{X|H}(x|0) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \qquad 0 < x < 1$$

(a) Determine las regiones de decisión del decisor LRT de parámetro η:

$$\frac{p_{X|H}(x|1)}{p_{X|H}(x|0)} \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \eta.$$

(b) Represente gráficamente, de forma aproximada, la ROC del decisor LRT.

(c) Represente, sobre la ROC, el punto de operación del decisor ML.

(d) Represente, sobre la ROC, el punto de operación del decisor minimax.

(e) Represente, sobre la ROC, el punto de operación del decisor de Neyman Pearson con $P_{\text{FA}} \leq 0.4$.

Solution:

(a) $x \underset{D=0}{\overset{D=1}{\gtrless}} \frac{2}{\pi}\arctan(\eta)$,

(b) La ROC es un arco de circunferencia de radio 1 y centrado en (1,0).

(c) $(P_{\text{FA}}, P_{\text{D}}) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $(P_{\text{FA}}, P_{\text{D}}) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(e) $(P_{\text{FA}}, P_{\text{D}}) = (0.4, 0.8)$