Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Segundo Curso de Ingeniería de Telecomunicaciones.

AMPPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II

Tiempo: 3,5 horas.

Problema 1 Resolver el siguiente problema en el rectángulo:

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0\,, \quad 0 < x < \pi/2,\ 0 < y < \pi\,, \\ u(0,y) = u(\pi/2,y) = 0\,, \\ u(x,\pi) = 0\,, \\ u(x,0) = 2\,\mathrm{sen}\,6x\,. \end{cases}$$

Problema 2 (a) Estudiar para qué valores del parámetro β, el problema

$$\begin{cases} \phi'' + \phi + \lambda\phi = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \\ \phi(0) = \phi'(0)\,, \\ \phi(\pi) = \beta\,\phi'(\pi)\,, \end{cases}$$

tiene $\lambda = 0$ como autovalor.

(b) Estudiar en función del parámetro β la existencia de solución del problema

$$\begin{cases} u'' + u = f(x)\,, \quad 0 < x < \pi\,, \\ u(0) = u'(0)\,, \\ u(\pi) = \beta\,u'(\pi)\,. \end{cases}$$

(c) Calcular la función de Green del problema anterior, en el caso $\beta = -1$.

Problema 3 Considerar el siguiente problema para la ecuación de ondas en un intervalo:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, \quad 0 < x < L\,, \\ u(0,t) = \cos\omega t\,,\ u(L,t) = 0\,, \\ u(x,0) = x/L - 1\,, \\ u_t(x,0) = 0\,. \end{cases}$$

(a) Transformar el problema en otro con condiciones de contorno homogéneas.
(b) Encontrar la solución del problema.
(c) Indicar para qué valores de ω hay resonancia.

Problema 4 (a) Calcular, para $a > 0$ fijo, la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & |x| \le a\,, \\ 0\,, & |x| > a\,. \end{cases}$$

(b) Resolver por transformada de Fourier el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \delta(x-t) + \delta(x+t) - 2\pi\delta(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

ALGUNAS FÓRMULAS ÚTILES

- Fórmula de representación para la ecuación del calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = F, \quad \vec{x} \in \Omega \subset I\!R^N,\ t > 0.$

$$
\begin{aligned}
u(\vec{x},t) \quad &= \int_0^t \int_\Omega F(\vec{x}_0,t_0) G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0)\, dx_0\, dt_0 \\
&-k \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Big(u(\vec{x}_0,t_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0) - G(\vec{x},t,\vec{x}_0,t_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x}_0,t_0) \Big)\, dx_0\, dt_0 \\
&+ \int_\Omega u(\vec{x}_0,0) G(\vec{x},t,\vec{x}_0,0)\, dx_0
\end{aligned}
$$