FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
APUNTES DE CALCULO II PARA PRIMER CURSO DE LOS GRADOS DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE TELECOMUNICACION
Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

1. CALCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

1.1. CONCEPTOS BASICOS

Definición. La **norma** de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ es $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. La **distancia** entre dos puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $\mathbf{R}^n$ es la norma de su diferencia, es decir, $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

La norma en $\mathbf{R}^n$ verifica propiedades similares al valor absoluto en $\mathbf{R}$, ya que, de hecho, la norma es igual al valor absoluto si $n = 1$:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \qquad \big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \big| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Definición. La bola abierta $B(\mathbf{x}_0, r)$ de centro $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a distancia menor que r del punto $\mathbf{x}_0$, es decir,

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \big\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r \big\}.$$

La bola cerrada $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ de centro $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a distancia menor o igual que r del punto $\mathbf{x}_0$, es decir,

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0, r) = \big\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le r \big\}.$$

Definición. Un conjunto $U \subseteq \mathbf{R}^n$ es **abierto** si para todo $\mathbf{x} \in U$ existe un $r > 0$ (que puede depender de $\mathbf{x}$) tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U$.

Un **entorno** de un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ es un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{x}$.

Un conjunto $F \subseteq \mathbf{R}^n$ es **cerrado** si su complemento $F^c = \mathbf{R}^n \setminus F$ es abierto.

La **frontera** ∂E de un conjunto $E \subseteq \mathbf{R}^n$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ (no tienen por qué estar en E) tales que en todo entorno de $\mathbf{x}$ hay algún punto de E y algún punto de E^c.

Un conjunto $E \subseteq \mathbf{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\partial E \subseteq E$.

El **interior** de un conjunto $E \subseteq \mathbf{R}^n$ es el subconjunto de puntos $\mathbf{x}$ de E para los que existe un $r > 0$ (que puede depender de $\mathbf{x}$) tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq E$. De hecho, el interior de E es el mayor subconjunto abierto de E.

La **clausura** $\overline{E}$ de un conjunto $E \subseteq \mathbf{R}^n$ es $\overline{E} = E \cup \partial E$. De hecho, la clausura de E es el menor conjunto cerrado que contiene a E.

Un conjunto $E \subseteq \mathbf{R}^n$ es **acotado** si existe un $r > 0$ tal que $E \subseteq B(\mathbf{0}, r)$.

Un conjunto $E \subseteq \mathbf{R}^n$ es **compacto** si es cerrado y acotado.

Es fácil ver que una bola abierta es un conjunto abierto y que una bola cerrada es un conjunto compacto. También es fácil ver que la unión e intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto, y que la unión e intersección de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

Definición. Una **función** es una regla cualquiera que hace corresponder un punto de $\mathbf{R}^m$ y sólo uno a cada punto de un cierto conjunto $A \subseteq \mathbf{R}^n$. $f(\mathbf{x})$ es el valor de la función f en el punto $\mathbf{x}$. El **dominio** de una función es el conjunto de puntos para los que está definida, A en este caso, y se denota por $\operatorname{Dom}(f)$. Si no se especifica nada, se sobreentiende que el dominio de una función está formado por todos los puntos para los cuales tiene sentido la definición. Habitualmente escribiremos

$$f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

para denotar que A es el conjunto inicial o dominio y $\mathbf{R}^m$ el conjunto final, de tal manera que a cada punto de A la función f le asocia un punto de $\mathbf{R}^m$.

La **imagen** de una función es el conjunto de los puntos y tales que existe un punto $\mathbf{x}$ con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, y se denota por $\operatorname{Img}(f)$.

La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos: $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : x \in \operatorname{Dom}(f)\}$.

Sean $A \subseteq \mathbf{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$. El **conjunto de nivel de valor** c es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in A$ para los cuales $f(\mathbf{x}) = c$, es decir, el conjunto $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\} \subseteq A \subseteq \mathbf{R}^n$. Si $n = 2$, hablamos de **curva de nivel de valor** c, y si $n = 3$, hablamos de **superficie de nivel de valor** c.

1.2. LIMITES Y CONTINUIDAD

Definición. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Se dice que $\mathbf{l} \in \mathbf{R}^m$ es el **límite** de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, y lo escribimos $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| < \varepsilon$ si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

Teorema 1. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si existe el límite cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ de $f(\mathbf{x})$, entonces es único. Es decir, si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_2$, entonces $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$.

Corolario 1. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^2$ que contiene a $(0,0)$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$. Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ dependen de θ, entonces no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ no dependen de θ, entonces **no se puede afirmar nada** sobre la existencia del límite.

Si el punto en el queremos estudiar el límite es $(x_0, y_0) \in A$, entonces se tiene un resultado similar: Si los límites $\lim_{r\to 0} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta)$ dependen de θ, entonces no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Proposición 1. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbf{R}$. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$ y g está acotada en un entorno de $\mathbf{x}_0$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$.

Teorema 2. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$, $c \in \mathbf{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si existen $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$, entonces:

$$(1) \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \big(cf(\mathbf{x})\big) = c\big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\big)\,.$$

$$(2) \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \big(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\big) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})\,.$$

$$(3) \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\big) = \big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\big)\big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})\big)\,, \quad \text{si } m = 1\,.$$

$$(4) \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}\,, \quad \text{si } m = 1, \text{ y } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \neq 0\,.$$

$$(5) \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \big(f(\mathbf{x})\big)^{g(\mathbf{x})} = \big(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\big)^{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})},$$

si $m = 1$ y todas las expresiones tienen sentido.

Teorema 3. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, son las funciones componentes de f, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ si y sólo si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = l_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Definición. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Se dice que f es **continua** en el punto $\mathbf{x}_0$ si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema 4. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$, $c \in \mathbf{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$, entonces:

(1) $cf(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$.
(2) $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$.
(3) $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$, si $m = 1$.
(4) $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$, si $m = 1$ y $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$.
(5) $(f(\mathbf{x}))^{g(\mathbf{x})}$ es continua en $\mathbf{x}_0$, si $m = 1$ y $(f(\mathbf{x}))^{g(\mathbf{x})}$ está definida en un entorno de $\mathbf{x}_0$.

Teorema 5. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, son las funciones componentes de f, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si f_i es continua para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Teorema 6. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$, $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$ y $g : B \longrightarrow \mathbf{R}^k$, donde B es un entorno de $f(\mathbf{x}_0)$. Si $f(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y $g(\mathbf{x})$ es continua en $f(\mathbf{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

Teorema 7. Sean $A \subseteq \mathbf{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces f está acotada en A.

Teorema 8. Sean $A \subseteq \mathbf{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces existen los valores máximo y mínimo de f en A.

1.3. DIFERENCIACION

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Entonces la **derivada parcial** $\partial f/\partial x_j$ de f con respecto a la variable x_j se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} \,,$$

donde $1 \leq j \leq n$ y $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica; es decir, la derivada parcial de f con respecto a la variable x_j es simplemente la derivada "usual" de f con respecto a la variable x_j, si se supone que el resto de las variables son constantes.

Si $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$, entonces $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, y podemos hablar de la derivada parcial $\partial f_i/\partial x_j$ de la componente i-ésima de f con respecto a la variable x_j.

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Decimos que f es **diferenciable** en (x_0, y_0) si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0) y si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0 \,.$$

En este caso se define el **plano tangente** a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0) como

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) \,.$$

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Decimos que f es **diferenciable** en $\mathbf{x}_0$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0 \,,$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ cuyo elemento en la fila i y columna j es $\partial f_i/\partial x_j$ evaluada en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (considerado como matriz columna). Llamamos a $\mathbf{T}$ la **derivada** o **diferencial** o **matriz jacobiana** de f en $\mathbf{x}_0$.

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ diferenciable en U. En este caso la matriz derivada de f en $\mathbf{x}$ tiene 1 fila y n columnas, es decir, es el vector

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \Big(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\Big) \,,$$

y también se denomina **gradiente** de f en $\mathbf{x}$. El gradiente suele designarse por los símbolos $\mathrm{grad}\, f$ ó ∇f.

Teorema 1. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

Observación. Puede ocurrir que existan las derivadas parciales de una función en $\mathbf{x}_0$, y que la función no sea continua en $\mathbf{x}_0$. Esto demuestra que la definición que hemos dado de función diferenciable es la "correcta".

Teorema 2. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ de f y son continuas en un entorno de $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Teorema 3. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$, $c \in \mathbf{R}$ y $f, g : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si f y g son diferenciables en $\mathbf{x}_0$, entonces:

(1) $cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{D}(cf)(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$.

(2) $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{D}(f+g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

(3) $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si $m = 1$, y $\mathbf{D}(fg)(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

(4) $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si $m = 1$ y $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, y

$$\mathbf{D}\Big(\frac{f}{g}\Big)(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)^2}\ .$$

Teorema 4. (Regla de la cadena.) Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ y $V \subseteq \mathbf{R}^m$ conjuntos abiertos con $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f(\mathbf{x}_0) \in V$, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ y $g : V \longrightarrow \mathbf{R}^k$. Si $f(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $f(\mathbf{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y

$$\mathbf{D}\big(g \circ f\big)(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{D}g)(f(\mathbf{x}_0))\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\,.$$

Por ejemplo, si $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, podemos escribir $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Si definimos $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ por $h(t) = f(g(t))$, entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,.$$

Como un segundo ejemplo, si $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, podemos escribir
$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$.
Si definimos $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ por $h(x, y, z) = f(g(x, y, z)) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\,,\\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\,,\\
\frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\,.
\end{aligned}$$

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$. La **derivada direccional** de f en $\mathbf{x}_0$ a lo largo del vector $\mathbf{v}$ se define como

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}\ .$$

Habitualmente se elige el vector $\mathbf{v}$ unitario (con norma 1). En este caso se habla de la **derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{v}$**.

Teorema 5. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ entonces existen todas las derivadas direccionales de f en $\mathbf{x}_0$. Además, la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{v}$ es igual a $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}$.

En éste último producto $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}$, el vector $\mathbf{v}$ debe escribirse como vector columna para que pueda realizarse el producto de matrices.

Teorema 6. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular al conjunto de nivel de f de valor $f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema 7. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es máxima y $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es mínima (f crece más rápidamente desde $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, y decrece más rápidamente en la dirección $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$).

Definición. Una **trayectoria** en $\mathbf{R}^n$ es una aplicación $c : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$. Si $n = 2$ es una **trayectoria en el plano**, y si $n = 3$ es una **trayectoria en el espacio**. Llamamos **curva** a la imagen de c en $\mathbf{R}^n$. Si $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, definimos la **velocidad** de c como $c'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, y la **aceleración** de c como $c''(t) = (x_1''(t), \ldots, x_n''(t))$. Llamamos **rapidez** de c a la norma del vector velocidad $c'(t)$.

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Definimos las **derivadas parciales de orden** 2 de f como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Esto puede repetirse para las derivadas de tercer orden o de orden superior a tres. De forma análoga se definen las derivadas parciales de orden mayor que uno para funciones de n variables.

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Decimos que f es **de clase** C^k en U si f y todas sus derivadas parciales de orden $1, 2, \ldots, k$, son continuas en U.

Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si $f = (f_1, \ldots, f_m)$, decimos que f es **de clase** C^k en U si f_i es de clase C^k en U para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Teorema 8. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Si f es de clase C^2 en U entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir, si $1 \leq i, j \leq n$ se tiene en U

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Definición. Ya hemos definido el **gradiente** de $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ como

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big).$$

Definimos la **divergencia** de $F : U \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ (es decir, $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$) como

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Definimos el **rotacional** de $F : U \subseteq \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ (es decir, $F = (F_1, F_2, F_3)$) como

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big).$$