

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
APUNTES DE CALCULO II PARA PRIMER CURSO DE LOS
GRADOS DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE TELECOMUNICACION
 Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

2. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbf{R}$. Decimos que \mathbf{x}_0 es un **máximo local** de f si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$; \mathbf{x}_0 es un **máximo local estricto** de f si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. Decimos que \mathbf{x}_0 es un **mínimo local** de f si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$; \mathbf{x}_0 es un **mínimo local estricto** de f si existe un entorno V de \mathbf{x}_0 tal que $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. El punto \mathbf{x}_0 es un **extremo local** de f si es un mínimo local o un máximo local. Los puntos \mathbf{x}_0 que verifican $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ se denominan **puntos críticos** de f . Un punto crítico que no es un extremo local se denomina **punto de silla**.

Teorema 1. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbf{R}$. Si f es diferenciable en \mathbf{x}_0 y f presenta en \mathbf{x}_0 un extremo local, entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico de f , es decir, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Definición. Se define la **matriz Hessiana** de $f : U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ como

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Teorema 2. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2 en U . Un punto $(x_0, y_0) \in U$ es un mínimo local estricto de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- (1) (x_0, y_0) es un punto crítico de f ,
- (2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$,
- (3) $D = \det Hf = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$, en (x_0, y_0) .

D se llama **discriminante**. Si en (2) ponemos < 0 en lugar de > 0 , sin cambiar las condiciones (1) y (3), entonces tenemos un máximo local estricto.

Teorema 3. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2 en U . Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f y el discriminante D de f en (x_0, y_0) verifica $D < 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto de silla de f .

Si el discriminante D de f en (x_0, y_0) verifica $D = 0$, **no podemos deducir** que (x_0, y_0) sea máximo local, mínimo local o punto de silla de f .

Teorema 4. Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2 en U , y $\mathbf{x}_0 \in U$ un punto crítico de f .

- (1) Si todos los autovalores de la matriz $Hf(\mathbf{x}_0)$ son estrictamente positivos, entonces \mathbf{x}_0 es un punto mínimo local estricto de f .
- (2) Si todos los autovalores de la matriz $Hf(\mathbf{x}_0)$ son estrictamente negativos, entonces \mathbf{x}_0 es un punto máximo local estricto de f .
- (3) Si dos autovalores de la matriz $Hf(\mathbf{x}_0)$ tienen distinto signo, entonces \mathbf{x}_0 es un punto de silla de f .

Teorema 5. (Multiplicadores de Lagrange.) Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f, g : U \rightarrow \mathbf{R}$ funciones de clase C^1 en U . Sean $\mathbf{x}_0 \in U$, $c = g(\mathbf{x}_0)$ y S el conjunto de nivel de g de valor c (es decir, el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in U$ tales que $g(\mathbf{x}) = c$). Supongamos que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Si la restricción de f a S (denotada por $f|_S$) tiene un máximo o un mínimo local en \mathbf{x}_0 , entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Los puntos \mathbf{x}_0 que verifican $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ se denominan **puntos críticos** de $f|_S$.

Teorema 6. (Localización de máximos y mínimos absolutos.) Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y $f : \bar{U} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua en \bar{U} . Entonces los valores máximo y mínimo de f en \bar{U} se alcanzan en puntos pertenecientes a alguno de los siguientes conjuntos:

- (1) los puntos de U en los que f no es diferenciable,
- (2) los puntos críticos de f en U ,
- (3) los puntos máximo y mínimo de $f|_{\partial U}$.

Teorema 6'. (Localización de máximos y mínimos absolutos.) Sean $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, A un conjunto abierto que contiene a \bar{U} y $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una función diferenciable en A . Supongamos que existen $c \in \mathbf{R}$ y una función g tales que $\partial U = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : g(\mathbf{x}) = c\}$, g es diferenciable en ∂U y $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \partial U$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en \bar{U} se alcanzan en los puntos críticos de f en U o en los puntos críticos de $f|_{\partial U}$.