FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
APUNTES DE CALCULO II PARA PRIMER CURSO DE LOS GRADOS DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE TELECOMUNICACION
Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

3. INTEGRACION EN $\mathbf{R}^n$

Definición. Sea R un **rectángulo n-dimensional** $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, con $a_i < b_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Se define la **medida** (n-dimensional) de R como $|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$.

Observación. Habitualmente la dimensión n será dos o tres, por lo que estaremos trabajando con subconjuntos del plano o del espacio. Si $n = 2$, la medida de R es el área de R. Si $n = 3$, la medida de R es el volumen de R.

Definición. Una **partición** P del rectángulo n-dimensional R es una partición de cada uno de los intervalos coordenados $[a_i, b_i]$, de modo que expresamos R como unión de subrectángulos $R = \cup_{i=1}^N R_i$.

Definición. Sea f una función acotada en un rectángulo n-dimensional R y P una partición de R tal que $R = \cup_{i=1}^N R_i$. Definimos las siguientes cantidades para $i = 1, \ldots, N$,

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in R_i\}\,, \qquad m_i = \inf\{f(x) : x \in R_i\}\,.$$

La **suma superior** asociada a P de f y la **suma inferior** asociada a P de f son respectivamente

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^N M_i |R_i|\,, \qquad L_f(P) = \sum_{i=1}^N m_i |R_i|\,.$$

Teorema 1. Sea f una función acotada en R. Entonces

$$\sup_P L_f(P) \le \inf_P U_f(P)\,.$$

Definición. Si f es una función acotada en R tal que existe un número real I verificando

$$\sup_P L_f(P) = \inf_P U_f(P) = I$$

diremos que f es **integrable** en R. Al número I lo llamaremos la **integral (definida)** de f en R, y lo escribiremos

$$I = \int_R f = \int_R f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n\,.$$

Observación. Si f es integrable en R, el número I es el único que verifica

$$L_f(P) \le I \le U_f(P) \qquad \text{para toda partición } P \text{ de } R.$$

Teorema 2. Si f es una función acotada en R y existe una sucesión de particiónes $\{P_n\}$ de R tales que

$$\lim_{n\to\infty} U_f(P_n) = \lim_{n\to\infty} L_f(P_n)\,,$$

entonces f es integrable en R y además

$$\lim_{n\to\infty} U_f(P_n) = \lim_{n\to\infty} L_f(P_n) = \int_R f\,.$$

Teorema 3. Si f es una función continua en R entonces f es integrable en R.

Teorema 4. (Teorema de Fubini). Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = R_1 \times R_2$ un rectángulo n-dimensional, donde $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j]$ y $R_2 = [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si f es una función integrable en R entonces

$$\int_R f = \int_{R_1} \Big(\int_{R_2} f(x,y)\, dy \Big)\, dx = \int_{R_2} \Big(\int_{R_1} f(x,y)\, dx \Big)\, dy\,,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_j)$ e $y = (x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Definición. Si D es una región acotada en $\mathbf{R}^n$ y f es una función acotada en D se define la **integral de** f **en** D como

$$\int_D f = \int_R f^*\,,$$

donde R es cualquier rectángulo n-dimensional que contenga a D y f^* es la función definida en todo $\mathbf{R}^n$ como

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D\,. \end{cases}$$

Teorema 5. Si f, g son funciones integrables en la región acotada D y $c \in \mathbf{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
(i)\ f+g \text{ es integrable en } D \ \text{ y } & \int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g\,,\\
(ii)\ cf \text{ es integrable en } D \ \text{ y } & \int_D cf = c\int_D f\,,\\
(iii)\ |f| \text{ es integrable en } D \ \text{ y } & \int_D |f| \ge \Big| \int_D f \Big|\,,\\
(iv)\ f\cdot g \text{ es integrable en } D \ \text{ y } & \Big(\int_D fg\Big)^2 \le \Big(\int_D f^2\Big)\Big(\int_D g^2\Big).
\end{aligned}$$

Observaciones. Las propiedades (i) y (ii) nos indican que el conjunto de las funciones integrables en D es un espacio vectorial y la integral es un operador lineal en este espacio. La propiedad (iv) se denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

Definición. Un conjunto A de $\mathbf{R}^n$ se dice que tiene **medida cero** (n-dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto de rectángulos n-dimensionales $R_1, R_2, \ldots$ finito o numerable tal que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \qquad \text{y} \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots < \varepsilon\,.$$

Diremos que una propiedad se verifica en **casi todo punto de** B si el conjunto de puntos de B que no verifican esa propiedad tiene medida cero.

Lema 1.
(1) Se obtiene una definición equivalente de conjuntos de medida cero si se toman rectángulos abiertos (o bolas abiertas o bolas cerradas) en vez de rectángulos cerrados.
(2) Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
(3) Si A es un conjunto finito o numerable, entonces $|A| = 0$.
(4) La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
(5) Si $A \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto que tiene "dimensión" menor que n, entonces $|A| = 0$.

Corolario 1. La unión finita o numerable de curvas en $\mathbf{R}^n$ tiene medida cero si $n \ge 2$. La unión finita o numerable de superficies en $\mathbf{R}^n$ tiene medida cero si $n \ge 3$.

Teorema 6.
(1) Sea f una función acotada en el rectángulo R. Entonces f es integrable en R si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en R tiene medida cero.
(2) Sea f una función acotada en la región acotada D con $|\partial D| = 0$. Entonces f es integrable en D si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en D tiene medida cero.

Definición. Si la región acotada D verifica $|\partial D| = 0$, se define la medida de D como $|D| = \int_D 1$. Por tanto, si $D \subset \mathbf{R}^2$, $\int_D 1$ es el área de D y, si $D \subset \mathbf{R}^3$, $\int_D 1$ es el volumen de D.

Teorema 7. Sea D una región acotada. Si las funciones f y g son integrables en D y son iguales en casi todo punto de D, es decir, el conjunto $\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida cero, entonces

$$\int_D f = \int_D g\,.$$

Teorema 8. Si f es integrable en la región acotada D y $m \leq f(x) \leq M$ para casi todo $x \in D$ entonces

$$m\,|D| \leq \int_D f \leq M\,|D|\,.$$

Corolario 2. Sean f, g funciones integrables en la región acotada D.

$$(i)\ \ \text{Si } f(x) \geq 0 \ \text{ para casi todo } x \in D, \ \text{ entonces } \int_D f \geq 0\,.$$

$$(ii)\ \ \text{Si } f(x) \geq g(x) \ \text{ para casi todo } x \in D, \ \text{ entonces } \int_D f \geq \int_D g\,.$$

Teorema 9. Sea f una función integrable en la región acotada D. Si $f(x) \geq 0$ para casi todo $x \in D$ y existe un punto $x_0 \in D$ con f continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces

$$\int_D f > 0\,.$$

Teorema 10. (Teorema del valor medio de la integral). Sean f continua en la región acotada D y $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in D$. Si f y g son integrables en D, entonces:

$$(i)\ \ \text{Existe } c_1 \in D \text{ tal que } \quad \int_D f = f(c_1)\,|D|\,.$$

$$(ii)\ \ \text{Existe } c_2 \in D \text{ tal que } \quad \int_D fg = f(c_2) \int_D g\,.$$

Teorema 11. Sean D una región acotada y f una función definida en D. Si D es la unión de las regiones de interiores disjuntos $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$, con $|\partial D_i| = 0$ para $i = 1, \ldots, k$, entonces f es integrable en D si y sólo si es integrable en D_i para $i = 1, \ldots, k$. Además se tiene que

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} f\,.$$

Definición. Una región $D \subset \mathbf{R}^n$ se dice **simétrica con respecto a la variable** x_j $(1 \leq j \leq n)$ si verifica la siguiente propiedad: $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in D$ si y sólo si $(x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in D$.

Una función f definida en D se dice **impar en** x_j si

$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\,;$$

f se dice **par en** x_j si

$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\,.$$

Teorema 12. Sean $D \subset \mathbf{R}^n$ una región simétrica con respecto a la variable x_j (para algún $1 \leq j \leq n$) y f una función integrable en D.

(1) Si f es impar en la variable x_j, entonces $\int_D f = 0$.

(2) Si f es par en la variable x_j y se define $D_j = \{x \in D : x_j \geq 0\}$, entonces $\int_D f = 2\int_{D_j} f$.

Definición. Sean D^* un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ y $T : D^* \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una transformación diferenciable. El **jacobiano** de T es el determinante de la matriz derivada de T, es decir,

$$JT = \det(DT)\,.$$

Observación. Tanto DT como JT son funciones del punto $x \in D^*$.

Teorema 13. (Teorema de cambio de variable). Sean D^* y D regiones de $\mathbf{R}^n$ y $T : D^* \longrightarrow D$ una transformación biyectiva de clase C^1. Entonces para toda f integrable en D se tiene

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D^*} f(T(u))\,|JT(u)|\,du\,,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

Observación 1. El Teorema de cambio de variable sigue siendo cierto si las hipótesis de biyectividad y diferenciabilidad dejan de cumplirse en un conjunto de medida cero.

Observación 2. Si T^{-1} denota la inversa de la aplicación diferenciable T, del teorema de la función inversa se deduce $(JT)(JT^{-1}) = 1$.

Cambio a coordenadas polares. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ a (r, θ), con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mediante las fórmulas:

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Observemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$. El determinante jacobiano del cambio es r.

Cambio a coordenadas cilíndricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ a (r, θ, z), con $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \in \mathbf{R}$, mediante las fórmulas:

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad z = z\,.$$

El determinante jacobiano del cambio es r.

Cambio a coordenadas esféricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ a (ρ, θ, ϕ), con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, mediante las fórmulas:

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,, \qquad z = \rho\cos\phi\,.$$

El valor absoluto del determinante jacobiano del cambio es $\rho^2\mathrm{sen}\,\phi$.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN DIMENSION n.

Valor medio. Si D es una región acotada en $\mathbf{R}^n$ y f es una función integrable en D se define el **promedio** o **valor medio de** f **en** D como

$$\frac{1}{|D|}\int_D f = \frac{\int_D f}{\int_D 1}\,.$$

Centro de gravedad. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **centro de gravedad** o **centro de masa** (y lo denotaremos por $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$), como

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint_D x\rho(x, y, z)\,dxdydz\,, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\iiint_D y\rho(x, y, z)\,dxdydz\,, \quad \overline{z} = \frac{1}{M}\iiint_D z\rho(x, y, z)\,dxdydz\,,$$

donde M es la **masa** del cuerpo, que puede calcularse como $M = \iiint_D \rho(x, y, z)\,dxdydz$.

Momento de inercia. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **momento de inercia respecto del eje E** (y lo denotaremos por I_E) como

$$I_E = \iiint_D \mathrm{dist}\,((x, y, z), E)^2\rho(x, y, z)\,dxdydz\,,$$

donde $\mathrm{dist}\,((x, y, z), E)$ es la distancia del punto (x, y, z) al eje E. Recordemos que $\mathrm{dist}\,((x, y, z), X)^2 = y^2 + z^2$, $\mathrm{dist}\,((x, y, z), Y)^2 = x^2 + z^2$ y $\mathrm{dist}\,((x, y, z), Z)^2 = x^2 + y^2$.