FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
APUNTES DE CALCULO II PARA PRIMER CURSO DE LOS GRADOS DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE TELECOMUNICACION
Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

4. INTEGRALES DE LINEA Y DE SUPERFICIE

4.1. INTEGRALES DE LINEA

Habitualmente suele identificarse una trayectoria $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ con su curva imagen $\sigma([a,b]) \subset \mathbf{R}^n$, que es la idea "intuitiva" que se tiene de una "curva".

Definición. Una curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ se dice **regular** si es diferenciable y $\sigma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. En este caso se define la **recta tangente** r a σ en el punto $\sigma(t_0)$, con $t_0 \in [a,b]$, (en forma paramétrica) como $r(\lambda) = \sigma(t_0) + \lambda\sigma'(t_0)$.

Definición. Una curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ se dice **simple** si es inyectiva en $[a,b]$, es decir, si $\sigma(t_0) \neq \sigma(t_1)$ siempre que $t_0 \neq t_1$. Se dice que σ es **cerrada** si $\sigma(a) = \sigma(b)$. Se dice que σ es **cerrada simple** si es cerrada y es inyectiva en $[a,b)$.

Definición. Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es **continua a trozos** si existen $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{M-1} < t_M = b$, tales que f es continua en cada (t_i, t_{i+1}) y existen los límites laterales de $f(t)$ en cada t_i, aunque no tienen por qué coincidir. (En t_0 sólo se pide que exista el límite por la derecha y en t_M que exista el límite por la izquierda).

Una curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^1 **a trozos** si σ' es continua a trozos en $[a,b]$.

Definición. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Decimos que una función definida en Ω es un **campo escalar** si toma valores reales, y que es un **campo vectorial** si toma valores en $\mathbf{R}^n$. Obsérvese que el dominio y la imagen de un campo vectorial tienen la misma dimensión.

Definición. (Integral de un campo escalar sobre una curva). Si $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es C^1 a trozos y $f : \sigma([a,b]) \longrightarrow \mathbf{R}$ es continua a trozos, se define **la integral de** f **a lo largo de** σ, también llamada la **integral de línea o de trayectoria**, como

$$\int_\sigma f = \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(x_1(t),\dots,x_n(t))\sqrt{(x_1'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}\,dt\,.$$

La integral de línea del campo escalar f también suele denotarse por $\int_\sigma f\,ds$ ó $\int_\sigma f(x_1,\dots,x_n)\,ds$. En particular, se define la longitud de σ como la integral de la función 1 a lo largo de σ, es decir,

$$l(\sigma) = \int_\sigma 1 = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt\,,$$

y el **valor promedio** de f a lo largo de σ como

$$\frac{1}{l(\sigma)}\int_\sigma f = \frac{1}{l(\sigma)}\int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt\,.$$

Definición. (Integral de un campo vectorial sobre una curva). Si $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es C^1 a trozos y $F : \sigma([a,b]) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es continua a trozos, se define **la integral de** F **a lo largo de** σ, también llamada **la integral de línea o de trayectoria**, como

$$\int_\sigma F = \int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_a^b F(x_1(t),\dots,x_n(t))\cdot\sigma'(t)\,dt\,.$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar usual. La integral de línea del campo vectorial F también suele denotarse por $\int_\sigma F\cdot ds$ ó $\int_\sigma F(x_1,\dots,x_n)\cdot ds$ o también $\int_\sigma F_1\,dx_1 + \cdots + F_n\,dx_n$, si $F = (F_1,\dots,F_n)$.

Conviene destacar que la integral del campo vectorial F a lo largo de σ es igual a la integral de un campo escalar, el de la componente tangente a σ de F a lo largo de σ, es decir, $F_T = F\cdot s$, donde s es el vector tangente unitario $s(t) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$ a la curva σ.

Definición. Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una curva simple. Decimos que $\rho : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una **reparametrización** de σ (o que σ y ρ son parametrizaciones de la misma curva) si existe una función continua e inyectiva $h : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ tal que $\rho = \sigma \circ h$. Decimos también que σ y ρ tienen la misma orientación si h es creciente y tienen distinta orientación si h es decreciente.

Si σ y ρ son parametrizaciones de la misma curva simple y no cerrada, σ y ρ tienen la misma orientación si y sólo si comienzan en el mismo punto, es decir, si $\sigma(a) = \rho(\alpha)$ (y por tanto, $\sigma(b) = \rho(\beta)$).

Teorema 1. La integral de un campo escalar a lo largo de una curva simple es independiente de la parametrización, es decir, si σ, ρ son parametrizaciones C^1 a trozos de la misma curva simple en $\mathbf{R}^n$ y $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ es continua, entonces

$$\int_\sigma f = \int_\rho f \,.$$

Teorema 2. Sean σ, ρ parametrizaciones C^1 a trozos de la misma curva simple en $\mathbf{R}^n$ y $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ continua. Entonces:

(1) Si σ y ρ tienen la misma orientación

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_\rho F \cdot ds \,.$$

(2) Si σ y ρ tienen distinta orientación

$$\int_\sigma F \cdot ds = -\int_\rho F \cdot ds \,.$$

Teorema 3. Sean $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una curva C^1 a trozos y $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 en un entorno de $\sigma([a,b])$. Entonces

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) \,.$$

Corolario 1. Sean $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una curva cerrada C^1 a trozos y $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 en un entorno de $\sigma([a,b])$. Entonces

$$\int_\sigma \nabla f = 0 \,.$$

Definición. Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^n$. Se dice que el campo vectorial $F : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una forma **diferencial exacta** (o **un campo conservativo**) en Ω si existe un campo escalar $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ que verifica $\nabla f = F$ en Ω. El campo f se denomina **potencial** de F.

Definición. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbf{R}^n$. Decimos que Ω es **simplemente conexo** si toda curva cerrada contenida en Ω puede deformarse continuamente dentro de Ω en un punto.

Si Ω es convexo, entonces es simplemente conexo.

Si $n = 2$, Ω es simplemente conexo si y sólo si no tiene "agujeros".

Si $n = 3$, una bola a la que quitamos un número finito de puntos es un conjunto simplemente conexo.

Teorema 4. Sean D un abierto simplemente conexo de $\mathbf{R}^n$ y F un campo vectorial de clase $C^1(D)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) F es un campo conservativo en D, es decir, existe f de clase $C^2(D)$ tal que $\nabla f = F$.
(2) Para toda curva cerrada σ contenida en D se tiene $\int_\sigma F \cdot ds = 0$.
(3) Para toda par de curvas σ_1, σ_2 contenidas en D y con los mismos extremos se tiene

$$\int_{\sigma_1} F \cdot ds = \int_{\sigma_2} F \cdot ds \,.$$

(4) $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ en D, si $n = 2$ y $F = (P,Q)$.
(4$'$) $\nabla \times F = 0$ en D, si $n = 3$.

4.2. INTEGRALES DE SUPERFICIE

Definición. Una **superficie parametrizada** o simplemente **superficie** es una aplicación continua $\Phi : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$, donde D es un abierto de $\mathbf{R}^2$. Esta aplicación puede escribirse como

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) .$$

Habitualmente suele identificarse una superficie Φ con su imagen $S = \Phi(D) \subset \mathbf{R}^3$, que es la idea "intuitiva" que se tiene de una "superficie".

Definición. Dada una superficie Φ, se definen los **vectores tangentes coordenados** como

$$T_u = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big), \quad T_v = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big).$$

Como estos vectores son tangentes a las imágenes mediante Φ de las curvas $v = cte.$ y $u = cte.$ respectivamente, y estas imágenes son curvas contenidas en la superficie, se tiene que T_u y T_v son vectores tangentes a la superficie, y por tanto, $T_u \times T_v$ es un vector perpendicular a la superficie.

Definición. Se dice que una supericie $\Phi : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$ es **regular** si es diferenciable y $T_u \times T_v \neq 0$ en todo punto de D. En este caso se define el plano tangente a Φ en el punto $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, con $(u_0, v_0) \in D$, como $(T_u \times T_v)(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$. También se define el vector normal unitario a Φ como

$$n = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} .$$

Definición. Se dice que una superficie es **orientable** si "tiene dos caras", es decir, si existe una determinación de vector normal unitario que sea continua en toda la superficie. Si Φ_1 y Φ_2 son dos parametrizaciones de la superficie orientable S, decimos que tienen la misma orientación si sus vectores normales unitarios coinciden, y que tienen distinta orientación si el vector normal unitario a Φ_2 es igual al vector normal unitario a Φ_1 multiplicado por -1.

Definición. (Integral de un campo escalar en una superficie). Si $\Phi : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$ es una superficie diferenciable y $f : \Phi(D) \longrightarrow \mathbf{R}$ es continua, se define la **integral de** f **en** Φ como

$$\int_\Phi f = \int_\Phi f\, dS = \int_D f\big(\Phi(u, v)\big)\big\|(T_u \times T_v)(u, v)\big\|\, du\, dv .$$

En particular, se define el **área** de Φ como la integral de la función 1 en Φ, es decir,

$$A(\Phi) = \int_\Phi 1 = \int_D \|T_u \times T_v\| .$$

y el **valor promedio** de f en Φ como

$$\frac{1}{A(\Phi)} \int_\Phi f .$$

Definición. (Integral de un campo vectorial en una superficie). Si $\Phi : D \longrightarrow \mathbf{R}^3$ es una superficie diferenciable y $F : \Phi(D) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ es continua, se define la **integral de** F **en** Φ como

$$\int_\Phi F = \int_\Phi F \cdot dS = \int_D F\big(\Phi(u, v)\big) \cdot \big(T_u \times T_v\big)(u, v)\, du\, dv .$$

Conviene destacar que la integral del campo vectorial F en Φ es igual a la integral en Φ de la componente normal a Φ de F, es decir, $F_n = F \cdot n$, donde n es el vector normal unitario a Φ. Por tanto,

$$\int_\Phi F \cdot dS = \int_\Phi F_n = \int_\Phi F \cdot n\, dS .$$

Teorema 6. La integral de un campo escalar en una superficie diferenciable es independiente de la parametrización, es decir, si Φ_1, Φ_2 son parametrizaciones de la misma superficie y $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ es continua, entonces

$$\int_{\Phi_1} f = \int_{\Phi_2} f \,.$$

Teorema 7. Sean Φ_1, Φ_2 parametrizaciones diferenciables de la misma superficie orientable y F una aplicación continua $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Entonces:
(1) Si Φ_1 y Φ_2 tienen la misma orientación

$$\int_{\Phi_1} F \cdot dS = \int_{\Phi_2} F \cdot dS \,.$$

(2) Si Φ_1 y Φ_2 tienen distinta orientación

$$\int_{\Phi_1} F \cdot dS = -\int_{\Phi_2} F \cdot dS \,.$$

Definición. Una superficie es **diferenciable a trozos** si es una unión finita de superficies diferenciables. Si una superficie S es diferenciable a trozos se define la integral de una función en S como la suma de sus integrales en las superficies que constituyen S.

4.3. TEOREMAS DEL CALCULO VECTORIAL

Definición. Una curva simple cerrada γ está **orientada en sentido positivo** si se recorre en contra del movimiento de las agujas del reloj (sentido antihorario).

Teorema 8. (Primera versión del Teorema de Green). Sean $D \subset \mathbf{R}^2$ un abierto acotado tal que ∂D es una curva simple cerrada de clase C^1 a trozos y P, Q funciones escalares de clase C^1 en $\overline{D}$. Entonces

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy\,,$$

si ∂D está orientada en sentido positivo.

Teorema 9. (Segunda versión del Teorema de Green). Sean $D \subset \mathbf{R}^2$ un abierto conexo acotado tal que ∂D es una unión finita de curvas simples cerradas de clase C^1 a trozos y P, Q funciones escalares de clase C^1 en $\overline{D}$. Entonces

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy\,,$$

si ∂D está orientada de la siguiente manera: la curva exterior se recorre en contra del movimiento de las agujas del reloj y las curvas interiores se recorren en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

Teorema 10. (Teorema de Stokes). Sean $S \subset \mathbf{R}^3$ una superficie diferenciable a trozos y orientable tal que ∂S es una unión finita de curvas simples cerradas C^1 a trozos, y F un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de S. Si la orientación de ∂S es compatible con la de S, entonces

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_S \operatorname{rot} F \cdot dS \,.$$

Corolario 2. Sean $S \subset \mathbf{R}^3$ una superficie cerrada (es decir, la frontera de una región acotada de $\mathbf{R}^3$ "sin agujeros") diferenciable a trozos y F un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de S. Entonces $\int_S \operatorname{rot} F = 0$.

Corolario 3. Sean $S_1, S_2 \subset \mathbf{R}^3$ dos superficie diferenciables a trozos y orientables tales que $\partial S_1 = \partial S_2$ es una unión finita de curvas simples cerradas C^1 a trozos, y F un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de $S_1 \cup S_2$. Si las orientaciones de S_1 y S_2 inducen la misma orientación en ∂S_1 y en ∂S_2, entonces $\int_{S_1} \operatorname{rot} F = \int_{S_2} \operatorname{rot} F$.

Teorema 11. (Teorema de Gauss o de la divergencia). Sean $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un abierto acotado tal que $\partial\Omega$ es una unión finita de superficies cerradas y diferenciables a trozos, y F un campo vectorial de clase C^1 en $\overline{\Omega}$. Si $\partial\Omega$ está orientada con el vector normal exterior, entonces

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dS = \int_\Omega \operatorname{div} F \,.$$