Definición

Para extender la propiedad de Markov a tiempo continuo se requiere definir la probabilidad condicional dado que conocemos el proceso en un intervalo continuo $[0, s]$ del tiempo, es decir, condicionar respecto a eventos del tipo $\{X_t, 0 \leq t \leq s\}$.

Decimos que el proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ es una **Cadena de Markov a tiempo continuo** si para cualesquiera instantes del tiempo $0 \leq s_0 < s_1 < \ldots s_n < s$ y cualquier conjunto de estados $i_0, \ldots, i_n, i, j$ se verifica

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_0} = i_0) = P(X_{t+s} = j | X_s = i)$$

Esto es, *dado el presente, cualquier otra información pasada del proceso es redundante para hacer pronósticos del futuro*.

Ejemplo

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ el proceso de Poisson con intensidad constante λ y $\{Y_n\}$ un CM a tiempo discreto con matriz de transición P. Entonces, el proceso definido por $X_t = Y_{N(t)}$ es una cadena de Markov a tiempo continuo.

Si $S_1, S_1, \ldots$ son los momentos de renovación del proceso $N(t)$, entonces $\{X_0, X_{S_1}, \ldots\}$ es una CM a tiempo discreto con la misma ley que $\{Y_n\}$ dado $Y_0 = X_0$. Los tiempos transcurridos ($T_i = S_i - S_{i-1}$) entre los instantes de actualización del proceso X_t son variables i.i.d exponenciales.

La propiedad de **pérdida de memoria** de la distribución exponencial es la clave para que la cadena descrita sea de Markov.

La **probabilidad de transición** de esta cadena es

$$P(X_t = j | X_0 = i) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} p^n(i, j)$$

Probabilidades y tasas de transición

Como en el caso discreto, supondremos que la cadena es homogénea,

$$P(X_{s+t} = j | X_s = i) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

y llamaremos matriz de **probabilidades de transición** a la matriz P_t con componente i, j definida por

$$[P_t]_{i,j} = p_t(i,j) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

Las probabilidades de transición satisfacen las **ecuaciones de Chapman-Kolmogorov**, que para el caso continuo son

$$p_{s+t}(i,j) = \sum_k p_s(i,k) p_t(k,j)$$

Definimos **tasa de transición** de i a j, y la denotamos por $q(i,j)$, al valor

$$q(i,j) = \lim_{t \to 0^+} \frac{p_t(i,j)}{t}$$

el cual se interpreta como la intensidad con que la cadena salta de i a j.

Construcción de la CM a partir de las tasas de transición

La tasa con la cual la cadena *deja* el estado i la denotamos por λ_i:

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i,j)$$

Decimos que un estado i es **absorbente** si $\lambda_i = 0$, estable si $0 < \lambda_i < \infty$ e **instantáneo** si $\lambda_i = \infty$. La cadena deja los estados instantáneos de forma inmediata, así que siempre asumiremos $\lambda_i < \infty$. Si $\lambda_i > 0$ definimos las probabilidades de transición

$$r(i,j) = q(i,j)/\lambda_i$$

Si $X(s) = i$ y el estado i es absorbente, la cadena permanecerá en i por siempre. Por el contrario, si el estado es estable, la cadena permanecerá en i un tiempo distribuído exponencialmente con tasa λ_i y luego *saltará* a otro estado con probabilidad de transición $r(i,j)$. Usando recursivamente este procedimiento **construímos** la cadena.

Ecuaciones diferenciales de Kolmogorov

Hemos discutido como a partir de las tasas de transición podemos construir la cadena a tiempo continuo. Ya que la cadena está determinada por las probabilidades de transición, entonces deberíamos poderlas calcular estas últimas a partir de las tasas de transición. La formalización de esta construcción se expresa en el siguiente resultado:

Teorema 1. Supongamos que ningún estado es instantáneo. Entonces, las probabilidades de transición son diferenciables en t y para cualquier par de estados i, j se tiene

$$\frac{dp_t}{dt}(i,j) = \sum_{k \neq i} q(i,k) p_t(k,j) - \lambda_i p_t(i,j) \quad \textbf{Backward equation}$$

$$\frac{dp_t}{dt}(i,j) = \sum_{k \neq j} q(k,j) p_t(i,k) - \lambda_j p_t(i,j) \quad \textbf{Forward equation}$$

Comportamiento asintótico

Para el estudio asintótico de las cadenas de Markov a tiempo continuo no requerimos la condición de aperiodicidad. Vamos a definir algunos conceptos para el caso continuo antes de enunciar los resultados más importantes.

1. Una cadena continua es irreductible si puede saltar de un estado a otro en un número finito de saltos. Más formalmente, para todo par de estados i, j existe una sucesión finita de estados $i = k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1} = j$ con $q(k_m, k_{m+1}) > 0$ para todo $1 \leq m \leq n$.
2. Llamamos **generador infinitesimal de la cadena** a la matriz Q definida por

$$Q(i,j) = \begin{cases} q(i,j) & \text{si } j \neq i \\ -\lambda_i & \text{si } j = i \end{cases}$$

Distribución estacionaria

Decimos que π es una distribución estacionaria si para todo $t > 0$ es una solución de $\pi = \pi P_t$. O bien, elemento a elemento, sipara todo j y $t > 0$

$$\pi(j) = \sum_i \pi(i) p_t(i,j)$$

Verificar por definión que una función de probabilidad es una distribución estacionaria es en general difícil ya que, por un lado, tiene que cumplirse $\pi = \pi P_t$ para todo $t > 0$ y, por otro, el cálculo de P_t puede ser complicado. El siguiente teorema resuelve el problema.

Teorema 2. π es una distribución estacionaria para la cadena sii satisface la **ecuación de balance** $\pi Q = 0$. O lo que es lo mismo, si y sólo si

$$\sum_{i \neq j} \pi(i) q(i,j) = \lambda_j \pi(j)$$

Teorema de convergencia

Al igual que en el caso discreto, de existir una distribución estacionaria, la cadena la alcanza asintóticamente, con indepecia de la distribución inicial. Es por ello que la distribución estacionaria es un objeto clave en el estudio de modelos markovianos:

Teorema 3. Supongamos que la cadena a tiempo continuo $\{X_t, t > 0\}$ es irreductible y que tiene distribución estacionaria π. Entonces,

$$\lim_{t\to\infty} p_t(i,j) = \pi(j)$$

Adicionalmente, si $G(i)$ es la ganancia obtenida cada vez que la cadena alcanza el estado i y $\sum_j |G(j)|\pi(j) < \infty$, se tiene

$$\frac{1}{t}\int_0^t G(X_s)ds \to \sum_j G(j)\pi(j), \text{ cuando } t \to \infty$$

Condición de balance detallado

Decimos que π satisface una **condición de balance detallado** si

$$\pi_i q(i,j) = \pi(j) q(j,i), \text{ para todo par de estados } i,j \tag{1}$$

sumando sobre todos los estados $i \neq j$, de la ecuación anterior resulta

$$\sum_{i \neq j} \pi_i q(i,j) = \lambda_j \pi_j \Rightarrow \sum_{i \neq j} \pi_i q(i,j) - \lambda_j \pi_j = [\pi Q]_j = 0$$

Es decir, si π satisface (1) entonces satisface la ecuación de balance $\pi Q = 0$ y en consecuencia es una distribución estacionaria.

Las **ecuaciones de balance detallado** (1) son en general sencillas de resolver y se satisfacen para muchos modelos importantes.

Cadenas de nacimiento y muerte

Consideremos la cadena a tiempo continuo con espacio de estados $\{0, 1, \dots\}$ con

$$q(i,j) = \begin{cases} \lambda_i & \text{para} \quad j = i+1 \\ \mu_i & \text{para} \quad j = i-1 \\ 0 & \text{para} \quad |j-i| > 1 \end{cases}$$

El proceso se denomina de **nacimiento y muerte**, λ_n representa la **tasa de nacimiento** y μ_n la **tasa de muerte** cuando hay n individuos.

Las ecuaciones de balance detallado de la cadena de nacimiento y muerte son

$$\pi(n-1)\lambda_{n-1} = \pi(n)\mu_n, \text{ para } n \geq 1$$

Usando recurrencia se obtiene

$$\pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\ \mu_{n-1}\cdots\mu_1}\pi(0)$$

Ejemplos de Colas

1. **M/M/1**. Es la cola en un sistema con un servidor, tiempos entre llegadas exponenciales con tasa λ y tiempos de servicio exponenciales con tasa μ. Corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \mu$. Si la **tasa de tráfico** $\rho = \lambda/\mu < 1$, su distribución estacionaria es la distribución geométrica desplazada

$$\pi(n) = (1-\rho)\rho^n \ \textit{para} \ n \geq 0$$

2. **M/M/s**. El mismo caso que antes pero con s servidores. Es el proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = \lambda$ y

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \leq n \leq s \\ s\mu & n > s \end{cases}$$

Si $\rho < s$ la cola tiene una distribución estacionaria que satisface

$$\pi(s+n) = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n+1} \pi(s-1)$$