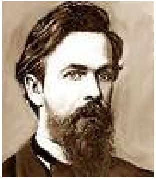
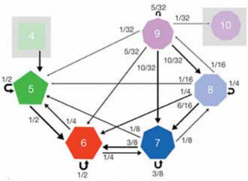
Cadenas de Markov

Hace más de un siglo se escribió el primer trabajo seminal sobre Cadenas de Markov y aún siguen siendo un instrumento tremendamente útil de modelación estocástica.





Su importancia obedece a dos razones:

1. Muchos ejemplos físicos, biológicos, económicos y sociales puedes ser descritos con ellas.
2. Son modelos sencillos y su teoría está bien desarrollada.

Definición

El proceso $\{X_n\}$ es una **Cadena de Markov** (CM) si para cualquier $n \in \mathbb{N}, j, i, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$ (espacio de estados)

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Esta expresión es llamada *propiedad de Markov* y establece que dado el presente cualquier otra información del pasado es irrelevante para predecir el futuro.

Nos restringiremos al caso **temporalmente homogéneo**, en el cual la probabilidad

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p(i, j)$$

no depende del tiempo n. La matriz P con componente $[P]_{i,j} = p(i, j)$ es llamada **matriz de transición** de la cadena $\{X_n\}$.

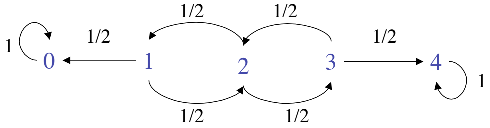
Ejemplo 1: Ruina del jugador

A y B son jugadores que tienen k y $N-k$ euros respectivamente. Lanzan una moneda repetidamente y en cada turno B le paga a A un euro si es cara. En caso contrario A le paga un euro a B. El juego termina cuando uno de los jugadores se arruina. La cantidad de euros que A tiene luego de n turnos es una CM con probabilidades de transición

$$p(i,i-1) = p(i,i+1) = \frac{1}{2}, \quad \text{si } 0 < i < N,$$

$$p(0,0) = p(N,N) = 1 \text{ y } p(i,j) = 0 \text{ en caso contrario}$$

A veces es útil representar la cadena por un diagrama. Para el ejemplo anterior, con $N = 4$, sería



Ejemplo 2: Urnas de Ehrenfest

Considere la CM que toma valores en $\{0, 1, \ldots, a\}$ con probabilidades de transición

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} 1 - \frac{i}{a} & \text{si } j = i + 1 \\ \frac{i}{a} & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En forma matricial, para $a = 5$,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	0	0	0	0
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	0	0	0
2	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	0	0
3	0	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0
4	0	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
5	0	0	0	0	1	0

Se tienen dos urnas, con a bolas repartidas dentro de ellas, y en cada etapa se escoge una bola al azar y se cambia de urna. La cadena X_n representa el número de bolas de una de las urnas tras n etapas.

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Usando la propiedad de Markov y la homogeneidad temporal, es fácil comprobar que la **probabilidad de ir de i a j en m etapas** es

$$P(X_m = j | X_0 = i) = \sum_k p(i,k) P(X_{m-1} = j | X_0 = k)$$

Iterando, se obtiene que

$$P(X_m = j | X_0 = i) = p^m(i,j)$$

Es decir, la probabilidad de ir de i a j en m etapas es el elemento (i,j) de P^m. La esencia de las ecuaciones anteriores está recogida en las **ecuaciones de Chapman-Kolmogorov**

$$p^{m+n}(i,j) = \sum_k p^m(i,k) p^n(k,j)$$

Conjuntos cerrados e irreductibles

Decimos que:

- j **es accesible desde** i $(i \to j)$ si, para algún n, $p^n(i,j) > 0$
- los **estados** i **y** j **se comunican** entre si $(i \leftrightarrow j)$ si $i \to j$ y $j \to i$.

Un conjunto de estados es:

- **cerrado** si no existe ningún estado fuera del conjunto que sea accesible desde adentro del conjunto. Es decir, una CM no puede *escapar* de un conjunto cerrado.
- **irreductible**, si todos los estados del conjunto se comunican entre si. Si el conjunto de estados de una CM es irreductible entonces la cadena *puede visitar* cualquier estado del conjunto.

Como ejemplo, considere la CM asociada a la ruina del jugador con N euros en juego. Entonces, $\{0, N\}$ es cerrado pero no es irreductible y $\{1, \ldots, N-1\}$ es irreductible pero no es cerrado.

Estados recurrentes y transitorios

Sea $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$ **tiempo de primera pasada por** i (sin contar de donde partió). Entonces, la probabilidad de que $\{X_n\}$ **regrese a** i es $\rho_i = P(T_i < \infty | X_0 = i)$.

La propiedad de Markov implica que la probabilidad de que $\{X_n\}$ retorne a i n veces es ρ_i^n. Por lo que

- Si $\rho_i < 1$ la probabilidad de que $\{X_n\}$ pase por i infinitas veces es cero. En ese caso, la cadena eventualmente **no regresa** a i y decimos que el estado i es **transitorio**.
- Si $\rho_i = 1$ la cadena regresa a i infinitas veces. En este caso decimos que el estado i es **recurrente**.

Un estado i se denomina **absorbente** si $p(i,i) = 1$. Por supuesto, si i es absorbente entonces es recurrente.

Siguiendo con el ejemplo anterior de la ruina del jugador, 0 y N son absorbentes mientras que $1, \ldots, N-1$ son transitorios.

Caracterización de conjuntos de estados recurrentes

Proposición 1. Si el espacio de estados de una cadena es finito entonces puede **partirse** en $T, C_1, \ldots, C_k$, donde T es el conjunto de todos los estados transitorios mientras que $C_1, \ldots, C_k$ son conjuntos irreductibles y cerrados de estados recurrentes.

Proposición 2. Si C es un conjunto de estados finito, cerrado e irreductible entonces todos los estados de C son recurrentes.

La prueba de la proposición 2 pasa por demostrar algunas propiedades útiles de los estados recurrentes y transitorios:

- Si i es recurrente y $i \to j$ y entonces j es recurrente.
- Si $i \to j$ pero j no se comunica con i entonces i es transitorio.
- En todo conjunto cerrado finito hay al menos un estado recurrente.

Estados periódicos y aperiódicos

Otra definición, desafortunadamente muy técnica pero necesaria para poder enunciar un importante resultado asintótico, es:
El **período del estado** i se define por

$$d(i) = \mathrm{m.c.d.}\{n \geq 1 : p^n(i,i) > 0\}$$

Si $d(i) = 1$, el estado i se denomina **aperiódico**.

En la ruina del jugador, los estados transitorios tienen período 2 mientras que los absorbentes son aperiódicos. En la mayoría de los casos nos encontraremos (o diseñaremos) CM con estados aperiódicos. Para verificar cuáles son aperiódicos, son útiles las siguientes propiedades:

- Si $p(i,i) > 0$ entonces i es aperiódico
- Si $i \leftrightarrow j$ entonces $d(i) = d(j)$

Distribución estacionaria

- La cadena $\{X_n\}$ es **estacionaria** si la distribución de X_n es la misma para todo n.
- Si S es el espacio de estados de la cadena $\{X_n\}$, decimos que $\{\pi_i : i \; S\}$ es **una distribución estacionaria** para la cadena si

$$X_0 \sim \pi \text{ implica que } X_n \sim \pi \text{ para todo } n.$$

Ahora bien, sabemos que si $X_n \sim \pi$ entonces $X_{n+1} \sim \pi P$. Es decir:

Una **distribución estacionaria** es una solución de la ecuación $\pi = \pi P$. O lo que es lo mismo, verifica

$$\pi(j) = \sum_i \pi(i) p(i,j) \text{ para cualquier estado } j$$

Si la cadena alcanza la distribución estacionaria, es común decir que la cadena está en *estado de equilibrio*.

Comportamiento asintótico

Teorema 1. Consideremos una CM con matriz de transición P y con espacio de estados irreductible y aperiódico. Si π es una distribución estacionaria entonces para todo par de estados i, j se tiene

$$\lim_{n \to \infty} p^n(i,j) = \pi(j)$$

Esto es, no importa de donde parta la cadena, asintóticamente alcanza el equilibrio. Los resultados que siguen tienen que ver con la unicidad y existencia de π.

Teorema 2. Si el espacio de estados es irreductible entonces de existir una distribución estacionaria sería única.

Teorema 3. Si el espacio de estados es finito entonces existe al menos una distribución estacionaria.

Distribución estacionaria y tiempos de retorno

La conexión entre la distribución estacionaria y los tiempos de primera visita, en este caso de **primer retorno**, viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 4. Si la CM es irreductible, aperiódica, y tiene distribución estacionaria π entonces

$$\pi(i) = \frac{1}{E[T_i|X_0 = i]}$$

Por simplicidad tipográfica, denotaremos por μ_i al tiempo esperado del primer retorno a i, esto es $\mu_i = E[T_i|X_0 = i]$.

Decimos que i es **recurrente positivo** si $\mu_i < \infty$. Si el estado i es recurrente pero no es positivo recurrente (*i.e.* si $\rho_i = 1$ pero $\mu_i = \infty$) entonces decimos que i es **recurrente nulo** .

Existencia de π cuando el espacio de estados es infinito

La clasificación anterior de estados recurrentes en nulo y positivos permite extender el teorema de existencia para el caso finito (Teorema 3) al caso infinito.

Teorema 5. Si una cadena es irreductible las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Al menos un estado es recurrente positivo
2. Todos los estados son recurrentes positivos
3. Existe una distribución estacionaria

La recurrencia positiva puede ser difícil de demostrar en ejemplos concretos. En la práctica, lo que hacemos es resolver $\pi = \pi P$ y aplicar que si $X_n \sim \pi$ entonces $X_m \sim \pi$ para todo $m \geq n$.

Ley de grandes números para CM

Una propiedad importante de las distribuciones estacionarias es que son la *fracción límite del tiempo de ocupación*. Más precisamente, si $N_n(i)$ es el número de visitas al estado i hasta el instante n entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(i)}{n} = \pi(i)$$

La formalización de este resultado la presentamos en una forma más general y útil para diversas aplicaciones:

Teorema 6. Sea $\{X_n\}$ una CM irreductible con matriz de transición P y distribución estacionaria π. Sea $G(i)$ la ganancia obtenida cada vez que la cadena alcanza el valor i. Supongamos que $\sum_i |G(i)|\pi(i) < \infty$. Entonces, cuando $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} G(X_k) \to \sum_i G(i)\pi(i)$$