PROCESOS ESTOCASTICOS

LISTA DE EJERCICIOS 1

1. Sean X una Poisson de parámetro λ e Y una Poisson de parámetro μ , independientes.

   a. Calcular $P(X = m \mid X + Y = n)$.

   b. Calcular $E[X \mid X + Y]$ y $Var[X \mid X + Y]$.

2. Sea X una variable de Poisson de parámetro λ. Para cada valor x que toma la variable X, se arroja una moneda x veces. Hallar la distribución del número de caras obtenidas.

3. Sea X variable aleatoria con distribución exponencial . Demostrar que

   $$P(X > s + x \mid X > s) = P(X > x)$$

   Esta propiedad se la conoce como "falta de memoria". Demostrar que se verifica lo mismo en el caso de una distribución geométrica de parámetro p.

4. Demostrar que:

   a. $E[aX + bY \mid Z] = aE[X \mid Z] + bE[Y \mid Z]$.

   b. $E[Y \mid X] = E[Y]$ si X e Y son independientes.

   c. $E[Yg(X) \mid X] = g(X)E[Y \mid X]$.

   d. $E[1 \mid X] = 1$.

   e. $E\left[E\left[Y^k \mid X\right]\right] = E\left[Y^k\right]$, $k > 0$.

5. Sabiendo que dada una variable aleatoria Z y una constante a cualquiera, se verifica que

   $$E\left[(Z - a)^2\right] = E\left[(Z - E[Z])^2\right] + (E[Z] - a)^2 .$$

   demuestra que:

   $$E\left[(Y - E[Y])^2 \mid X\right] = E\left[(Y - E[Y \mid X])^2 \mid X\right] + (E[Y \mid X] - E[Y])^2 .$$

6. Partiendo de la ley de momentos totales $(E[Y] = E[E[Y \mid X]])$, obtener:

   $$V[Y] = E[V[Y \mid X]] + V[E[Y \mid X]] .$$

7. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{U}(0, 1)$. Sea

   $$Y_n = \text{máx}(X_1, X_2, ..., X_n)$$

   Calcular

   a. $E[Y_n \mid Y_{n-1}]$

   b. $E[Y_n]$

8. Sean $X_1, X_2, ...$ idénticamente distribuídas con media μ y sea N una variable aleatoria, que toma valores enteros positivos e independiente de las $X's$. Sea

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Calcular

a. $E[S \mid N]$
b. $E[S]$

9. Sean (X, Y, Z) tres variables aleatorias con distribución conjunta

$$P(X = k, Y = m, Z = n) = p^3 q^{n - 3}$$

para

$$\begin{aligned} k &= 1, ..., m - 1 \\ m &= 2, ..., n - 1 \\ n &= 3, 4, ... \\ 0 &< p < 1 \\ 1 &= p + q \end{aligned}$$

a. Calcula $E[Z \mid X, Y]$
b. Calcula $E[g(Z) \mid X, Y]$. Toma $g(b) = \alpha^b$, con $\alpha \in [0, 1]$.

10. Se lanzan tres monedas de 10, 20 y 50 céntimos respectivamente. Sea X la suma de los valores de las monedas que caen en cara y sea Y la misma suma pero considerando sólo las monedas de 10 y de 20 céntimos. Calcula $E[X \mid Y]$.

11. Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y sean (X, Y) dos variables aleatorias definidas sobre Ω con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$$

para $x, y \in [0, 1]$. Calcula $E[X \mid Y]$.

12. Dos hermanos se han comprado un pastel de crema. Comer más de la mitad del pastel le causaría a cualquiera de los dos una indigestión. El hermano mayor decide comer una porcíon de pastel, mientras no le ve el hermano pequeño. Posteriormente, el hermano pequeño se toma una parte de lo que quedaba. Suponiendo que el tamaño de la porción que come cada hermano sigue una distribución uniforme sobre la cantidad de pastel que había disponible en cada momento, ¿cuál es la cantidad esperada de pastel que queda si ninguno de los dos hermanos ha sufrido una indigestión?

13. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Mostrar que $X+Y$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

14. Hallar la distribución de $X_1 + ... + X_n$, siendo $X_1, ..., X_n$ independientes y

a. $X_1, ..., X_n$ exponenciales de parámetro λ. (Sugerencia: calcular la función generadora de momentos de una Gamma).

b. $X_1, ..., X_n$ geométricas de parámetro p.

15. Sea X distribuída según una $\mathcal{N}(0,1)$. Halla $E[e^{tX}]$. Deriva esta expresión para obtener la esperanza y la varianza de X.

16. Encuentra la función generatriz de la distribución *Binomial negativa*, cuya función de probabilidad viene dada por

$$f(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, r+1, ...$$

donde $0 < p < 1$ y r es un entero positivo. Determina la media y la varianza. Indicación:

$$(1-a)^{-r} = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} a^{k-r} \qquad para\ r = 1, 2, ...$$

17. Supongamos que tenemos la sucesión de variables aleatorias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. con $X_i \sim \exp(\lambda)$. Definimos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

a. Calcular $E[S_n]$ y $Var[S_n]$, a partir de la función generadora de momentos.

b. Obtener la distribución de $S_n \mid S_0, S_1, ..., S_{n-1}$.

c. Calcular $E[S_{20} \mid S_{10}, S_8, S_3]$.

d. Calcular $E[S_{10}\ S_{12}]$.

e. Calcular $E[S_{10}\ S_{12} \mid S_5]$.

f. Comprobar que $E[E[S_{10}\ S_{12} \mid S_5]] = E[S_{10}\ S_{12}]$.

18. Demostrar que si $\{X_t\}$ es un proceso estocástico de incrementos independientes entonces se verifica que :

$$Cov(X_t, X_s) = Var\left[X_{\text{mín}(t,s)}\right].$$

19. Consideremos el proceso $x(t) = acos(\beta t) + bsen(\beta t)$, donde a y b son variables aleatorias independientes, con varianza σ^2, y β es una constante. Hallar como deben ser las medias de a y b para que el proceso sea débilmente estacionario. Hallar su función de autocovarianzas y de autocorrelación.

20. Sea el proceso $x(n) = e^{-an}$, donde a es una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0, 2)$. Demostrar que el proceso no puede ser estacionario en ningún sentido.

21. [$Junio$, 1998] A partir de las variables aleatorias A y B incorreladas, centradas y de varianza 1, se construye para ω fijo en $[-\pi, \pi]$, el proceso

$$X_n = A\cos n\omega + B\sin n\omega \qquad n \geq 0$$

a. Definir proceso estrictamente estacionario y estacionario en covarianza.

b. Demostrar que X_n es estacionario en covarianza.

c. Demostrar que si A y B están normalmente distribuídas, entonces X_n es estrictamente estacionario.

22. Supongamos el proceso de Bernoulli dado por $P(Y_i = 1) = p$ y $P(Y_i = 0) = 1$ - p para las variables $\{Y_i\}$ i.i.d. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Denominemos "llegadas" a la ocurrencia $\{Y_i = 1\}$ de los sucesos del proceso de Bernoulli. Demostrar que el tiempo T hasta la primera llegada sigue una distribución geométrica.

    a. Consideremos un tipo particular de componente electrónico. Asumamos que la vida útil de dicho componente es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ. Supongamos que tenemos reemplazo para estos componentes, todos manufacturados bajo las mismas condiciones. Sea T_n la vida útil del n-enésimo componente (una variable con distribución exponencial λ) y supongamos que $T_1, ..., T_n$ son mutuamente independientes para todo valor de n.

       Consideremos el siguiente **modelo de renovación**. Instalamos el primer componente y ponemos en funcionamiento la máquina en el tiempo $t = 0$. Cuando el primer componente falla inmediatamente lo reemplazamos por otro y rearrancamos la máquina. Continuamos de este modo indefinidamente. En cualquier instante t podemos observar: $N(t) =$ número de componentes que fallaron en el período hasta el tiempo t. Hallar la distribución de $N(t)$.

    b. Se observaron 24 componentes (simultáneamente) obteniéndose los siguientes tiempos de duración (en horas):

4590,47	4387,97	4473,71	4291,31	4409,85	4372,93
4423,73	4547,64	4547,78	4567,00	4465,93	4499,95
4344,46	4404,92	4577,03	4493,87	4325,26	4482,46
4489,00	4409,48	4479,23	4706,59	4404,21	4288,91

       Calcular la probabilidad de que en seis meses se tengan que cambiar más de tres componentes.

23. Las especificaciones técnicas para que una pieza producida sea aceptable es que su diametro esté en el intervalo $(\mu \pm \sigma)$, considerando que la longitud sigue una distribución $N(40, 9)$. En la producción secuencial independiente de estas piezas se desea conocer, siendo $S_n =$ número de piezas aceptables de las n primeras producidas:

    a. $P(S_{10} = 9 \ , \ S_{20} = 18 \ , \ S_{30} = 25)$.
    b. $E[S_{20} \mid S_{10} = 9, S_5 = 4, S_3 = 1]$
    c. $Cov(S_{10}, S_{12})$.

24. Siendo $\{X_i\}_{i\geq 1} \sim Bernoulli(1/2)$ sucesión de v.a.i.i.d., se define el proceso

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad n \geq 1 \\ S_0 &= 0 \end{aligned}$$

    a. Dar la distribución marginal de S_{10}
    b. Hallar $E[S_{10} \mid S_2 = 2, S_1 = 0]$
    c. Hallar $P(S_{10} = 5, S_2 = 2)$

25. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ un proceso de Bernoulli con espacio de estados $S = \{0, 1\}$ y probabilidad de *éxito* $p = P(X_n = 1)$

a. Calcula $P(X_2 = 0, X_5 = 1, X_8 = 1)$

b. Da una expresión explícita para calcular la distribución finita del proceso.

c. Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$. Comprueba que el proceso $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ es de incrementos estacionarios e independientes.

26. La variable X representa la proporción de errores de tipo A en ciertos documentos e Y la proporción de errores de tipo B. Se verifica que $X + Y \leq 1$ (hay otros errores posibles, $C, D, ...$) y la distribución conjunta de ambas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad x + y \leq 1 \\ 0 & \mathit{resto} \end{cases}$$

Calcula $E\left[X \mid Y = y_0\right]$.