PROCESOS ESTOCASTICOS

LISTA DE EJERCICIOS 2

1. Si A y B son matrices estocásticas demostrar que AB es estocástica y que todas las potencias A^n también lo son. ¿Ocurre lo mismo si se trata de matrices doblemente estocásticas?

2. Demostrar que todo proceso $\{X_n : n = 0, 1, ...\}$ de incrementos independientes es Markoviano (suponer $X_0 = 0$).

3. Considérese una serie de lanzamientos independientes de una moneda que tiene probabilidad p de salir cara. Demostrar si, para cada uno de los siguientes casos, $\{X_n\}$ es o no una cadena de Markov. En caso afirmativo, representar el espacio de los estados y hallar su matriz de transición.

   a. Para $n \geq 2$, sea X_n igual a 0,1,2 ó 3 según que los lanzamientos $(n-1)$-ésimo y n-ésimo hayan sido $(cara, cara)$, $(cruz, cara)$, $(cara, cruz)$ o $(cruz, cruz)$, respectivamente.

   b. Para $n \geq 2$, sea X_n igual a 0 ó 1, según que resulten o no caras los lanzamientos $(n-1)$-ésimo y $n-$ésimo.

4. Supongamos que tenemos una moneda con probabilidad de cara p. Tiramos la moneda repetidamente y vamos anotando el número de caras, es decir, consideramos el proceso $S(n) =$"*nro. de caras aparecidas hasta el tiro n-'esimo*"$(S(0) = 0)$. *Los posibles estados son entonces* $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

   a. Representar el espacio de los estados.

   b. Hallar la matriz de transición.

   c. Sea $T_n =$"*nro. de tiros necesarios para estar en el estado n*"$.Calcularladistribuci'ondeprobabilidaddeT_n$.

5. En una cierta región se ha observado que los días secos y húmedos se suceden de acuerdo con las siguientes frecuencias: si un día es seco, el día siguiente es seco con probabilidad 1/2 , y si un día es húmedo, el día siguiente lo es también con probabilidad 3/4.

   a. Determínese la probabilidad de que si hoy es seco, dentro de 10 días el clima sea seco; y también la probabilidad de que al cabo de n días haya dos días consecutivos húmedos, seguidos de uno seco.

   b. Determinar , si hoy es seco, el número esperado de días húmedos entre los m siguientes.

   c. Supongamos que la probabilidad de lluvia el primer día del año es 1/4. Calcular la probabilidad de que llueva el n-ésimo día y que no llueva al siguiente.

6. Inicialmente una empresa tiene dos máquinas iguales; a lo largo de una jornada de trabajo, cada máquina tiene probabilidad $1/4$ *de averirse. Las máquinas averiadas durante el día son enviadas a reparar al final de la jornada y devueltas en funcionamiento al cabo de 24 horas.*

a. Hallar la distribución del numero de máquinas que la empresa tiene disponibles al comienzo de la jornada n.

b. Hallar la proporción límite de días que la empresa se encuentra sin maquinaria y, a la larga, el número medio de máquinas que trabajan al principio de cada día.

c. Calcular el número medio de averías sufridas en los n primeros días.

7. *Para la cadena de Markov cuya matriz de probabilidades es*

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

a. Calcular la distribución marginal para la etapa tercera si la distribución inicial es la uniforme.

b. Hallar la forma general del vector de probabilidades de primera pasada para el estado 3.

c. Clasificar los estados aplicando el resultado obtenido en (b).

d. Hallar la distribución estacionaria.

8. *Obtener la distribución estacionaria para la cadena de Markov cuya matriz de probabilidades de transición es*

$$\begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1-a \end{pmatrix}$$

9. (()) *Probar que si la matriz de transición de una cadena de Markov es doblemente estocástica y $\#S = N$ entonces la distribución uniforme es distribución estacionaria para la cadena.*

10. *Se distribuyen tres bolas blancas y tres bolas negras entre dos urnas, de manera que cada urna contiene tres bolas. En cada iteración se extrae una bola de cada urna y se pasa a la otra urna. Sea X_n el número de bolas blancas en la urna de la izquierda tras n iteraciones. Calcula la matriz de probabilidades de transición del proceso X_n.*

11. *Un taxista se mueve entre el aeropuerto (A) y dos hoteles (B y C), según las siguientes normas. Si está en el aeropuerto, irá a alguno de los dos hoteles con la misma probabilidad. Si se encuentra en uno de los hoteles, volverá al aeropuerto con probabilidad 3/4 o irá al otro hotel con probabilidad 1/4.*

a. Determina la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

b. Suponiendo que el taxista se encuentra en el aeropuerto en el instante 0, calcula la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los destinos en el instante 2.

c. Bajo la misma suposición del apartado anterior, calcula la probabilidad de que esté en el hotel B en el instante 3.

12. *Considera las siguientes matrices de transición. ¿Cuáles de los estados son recurrentes y cuáles transitorios? Razona tus respuestas.*

a.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.4	0.3	0.3	0	0
2	0	0.5	0	0.5	0
3	0.5	0	0.5	0	0
4	0	0.5	0	0.5	0
5	0	0.3	0	0.3	0.4

b

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0.1	0	0	0.4	0.5	0
2	0.1	0.2	0.2	0	0.5	0
3	0	0.1	0.3	0	0	0.6
4	0.1	0	0	0.9	0	0
5	0	0	0	0.4	0	0.6
6	0	0	0	0	0.5	0.5

13. *Considera las siguientes matrices de transición. Identifica los estados recurrentes y los transitorios, así como los clases en las cadenas de Markov. Razona tus respuestas.*

    a.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	0	0	0	1
2	0	0.2	0	0.8	0
3	0.1	0.2	0.3	0.4	0
4	0	0.6	0	0.4	0
5	0.3	0	0	0	0.7

    b.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2/3	0	0	1/3	0	0
2	0	1/2	0	0	1/2	0
3	0	0	1/3	1/3	1/3	0
4	1/2	0	0	1/2	0	0
5	0	1/2	0	0	1/2	0
6	1/2	0	0	1/2	0	0

14. *En un garage se tienen dos bombillas luciendo. Cuando ambas se funden, son reemplazadas, y el próximo día comienza con dos bombilas nuevas. Supóngase que cuando ambas funcionan bien, una de las dos se fundirá con probabilidad 0.02 (cada una tiene probabilidad 0.01 de fundirse e ignoramos la posibilidad de perder las dos el mismo día). Sin embargo, cuando sólo está funcionando una, se apagará con probabilidad 0.05.*

    a. *A largo plazo, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente una bombilla funcionando?*
    b. *¿Cuál es el tiempo esperado entre dos reemplazamientos de bombillas?*

15. *Paseo aleatorio en un círculo. Consideremos los puntos 1, 2, 3 y 4 marcados en una anillo. Sea X_n la cadena de Markov que se mueve hacia la derecha con probabilidad p y a la izquierda con probabilidad $1-p$, sujeto a que si X_n va a la izquierda de 1 pasa a 4, y si X_n va a la derecha de 4 termina en 1.*

a. *Encuentra la matriz de transición de la cadena.*

b. *A largo plazo, determina la cantidad de tiempo que la cadena pasa en cada estado.*

16. *Paseo aleatorio en una línea. Considera los puntos 1, 2 ,3 y 4 marcados en una línea recta. Sea* X_n *una cadena de Markov que se mueve a la derecha con probabilidad 2/3 y a la izquierda con probabilidad 1/3, pero de manera que si intenta ir a la izquierda de 1 o a la derecha de 4, permanece en el mismo punto.*

    a. *Encuentra la matriz de transición de la cadena.*

    b. *A largo plazo, calcula la cantidad de tiempo que la cadena pasa en cada punto.*

17. *Se lanza un dado repetidas veces y sean* Y_1, Y_2, ... *los números obtenidos. Sea* $X_n = |\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}|$ *el número de valores distintos que se han obtenido en los primeros* n *lanzamientos, tomando* $X_0 = 0$.

    a. *Comprueba que* X_n *es una cadena de Markov.*

    b. *Encuentra la matriz de probabilidades de transición.*

    c. *Sea* $T = \min\{n : X_n = 6\}$ *el número de intentos necesarios para que hayan salido los seis números al menos una vez. Encuentra* $E[T]$.

18. *Un criminal llamado Xavier y un policía llamado Yakov, se mueven entre tres posibles posiciones según unas cadenas de Markov* X_n *e* Y_n *con matrices de transición*

$$P_{Xavier} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \;\; y \;\; P_{Yakov} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

En el instante $T = \min\{n : X_n = Y_n\}$ *la persecución se termina y el criminal es atrapado. Suponiendo que* $X_0 = i$ *e* $Y_0 = j$, *con* $i \neq j$, *encuentra el valor esperado de* T.

19. *Paseo aleatorio sobre un reloj. Considérense los números 1, 2, ..., 12 escritos alrededor de un aro como lo están habitualemente en un reloj. Considérese la cadena de Markov en la que de cualquier punto se salta con identica probabilidad a un punto adyacente.*

    a. *¿Cuál es el número esperado de saltos para que* X_n *regrese al punto de partida?*

    b. *¿Cuál es la probabilidad de que* X_n *visite todos los otros puntos antes de volver al punto de partida?*

20. ***Simulación. Cadenas de Markov en Genética.***
Se dispone de una población fija de $2N$ *genes descompuesta en dos tipos de genes, de tipo a y de tipo A. La siguiente generación se determina a partir de la generación padre como sigue: si la generación padre consiste en* j *a-genes y* $2N - j$ *A-genes, cada gen de la siguiente generación tendrá probabilidad* $p_j = \frac{j}{2N}$ *de pertenecer al tipo a y probabilidad* $q_j = 1 - \frac{j}{2N}$ *de pertenecer al tipo A. Mediante este procedimiento se genera una cadena de Markov* $\{X_n\}$ *donde* X_n *es el número de genes que pertenecen al tipo a en la generación* n, *siempre suponiendo un tamaño de población fija* $2N$. *Así, el espacio de estados es*

$$S = \{0, 1, 2, ..., 2N\}$$

Observar que los estados 0 *y* $2N$ *son absorbentes.*

a. *Calcular la matriz de probabilidades de transición.*

b. *Simular varias cadenas de Markov genéticas y estimar la probabilidad de absorción en* 0 *(todos son A-genes) y en* $2N$ *(todos son a-genes), a partir de la condición* $X_0 = i$.

c. *Un modelo más realístico tiene en cuenta las presiones de mutación. Se asume que, antes de la formación de una nueva generación, cada gen de un tipo tiene la posibilidad de mutar en otro. Sea* α_1 *la probabilidad de mutar* $a \longrightarrow A$*, y* α_2 *la probabilidad de mutar* $A \longrightarrow a$*. Así cada gen de la siguiente generación tiene probabilidad*

$$p_j = \frac{j}{2N}(1-\alpha_1) + (1-\frac{j}{2N})\alpha_2$$

de pertenecer al tipo a, y probabilidad

$$q_j = \frac{j}{2N}\alpha_1 + (1-\frac{j}{2N})(1-\alpha_2)$$

de pertenecer al tipo A.
Calcular la matriz de probabilidades de transición a partir del primer apartado. Comprobar que cuando n *es suficientemente grande la distribución de* X_n *se aproxima a una distribución estacionaria.*

21. *Probar que, si* i *es recurrente y si* i, j *se comunican, entonces* j *es recurrente.*

22. *Clasificar los estados de la Cadena de Markov siguiente*

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

23. *Supóngase que la matriz dada a continuación representa la matriz de transición en* n *etapas, para una Cadena de Markov homogénea, con estados* $S = \{\alpha, \beta\}$*:*

$$P^n = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.60 \\ 0.40 & 0.60 \end{bmatrix} + \left(\frac{-1}{5}\right)^n \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

y además, el vector incial viene dado por $\mathrm{p}^0 = (0{,}60\ 0{,}40)$*. Calcular:*

a. *La probabilidad de que tras visitar el estado* α*, los estados visitados consecutivamente sean* β*,* β *y* α*.*

b. *La probabilidad de que la cadena esté en* α *en la etapa 3.*

c. *La probabilidad de que la cadena pase por* α *en la etapa 3, por* β *en la etapa 5 y por* α *en la etapa 8.*

d. *¿Es ergódica la cadena? ¿qué comportamiento límite iene? ¿por qué?*

24. *Estudiar el comportamiento límite de las cadenas de Markov cuyas matrices de transición son* *a.*

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

b.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 1/5 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \end{bmatrix}$$

25. *Sea* X_n, *para* $n \geq 1$, *una sucesión de v.a.i.i.d. con* $P(X_n = 1) = p$ *y* $P(X_n = -1) = q = 1 - p$. *Se define* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *para* $n \geq 1$ *y* $S_0 = 0$. *Demuestra que* S_n *es una cadena de Markov con probabilidades de transición*

$$p(j \mid i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i + 1 \\ q & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

A S_n *se le llama paseo aleatorio con inicio en 0. Reemplazando* $S_0 = 0$ *por* $S_0 = i$, *se tiene un paseo aleatorio con inicio en* i.
Demuestra que para el paseo aleatorio se tiene que

$$P(S_n = j \mid S_0 = i) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}} & \text{si } n + j - i \text{ es un entero par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$