PROCESOS ESTOCASTICOS

LISTA DE EJERCICIOS 3

1. Sean X e Y variables aleatorias independientes con $X \sim \exp(\alpha)$ e $Y \sim \exp(\beta)$. Hallar la distribución del $\min\{X, Y\}$.

2. Un local tiene dos fotocopiadoras. Los trabajos en la máquina A requieren X minutos con $X \sim exp(\alpha)$ ($\alpha = 2$ trabajos por minuto). Los de la máquina B requieren Y minutos con $Y \sim exp(\beta)$ ($\beta = 3$ trabajos por minuto). A y B funcionan independientemente. En un instante entramos al negocio y están ambas ocupadas. Calcular:

    a) la probabilidad de que A termine antes que B,

    b) la probabilidad de que al menos una termine el trabajo que esté haciendo en los siguientes 30 segundos,

    c) la probabilidad de que ambas terminen sus trabajos en los siguientes 30 segundos.

3. Considérese un banco con dos cajeros. Tres personas A, B y C entran en el banco casi al mismo tiempo y en ese orden. A y B son atendidas directamente mientras que C tiene que esperar hasta que un cajero quede disponible. Supongamos que los tiempos de servicio de cada cajero siguen una distribución exponencial con media 4 minutos.

    a) ¿Cuál es el tiempo total esperado que tardará C en hacer su gestión?

    b) ¿Cuál es el tiempo total esperado hasta que los tres clientes salgan del banco?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que C sea el último en salir?

4. Supongamos que la tasa de fallos de un chip electrónico es $\lambda/hora$. En un periodo de 24 horas exactamente un chip falló. ¿Cuál es la distribución del tiempo T en que falló?

5. Supongamos que $N(t)$ es un proceso de Poisson con tasa λ y $0 < s < t$. Mostrar que la distribución condicional de la variable $N(s)$, dado $N(t) = n$, es binomial con parámetros n y $p = s/t$.

6. El número de llamadas telefónicas que llegan a una central en el tiempo t obedece a una distribución de Poisson $\{N(t)\}$. En media, se atiende una llamada cada 10 minutos.

    a) Calcular la probabilidad de que no se reciban llamadas entre $0 < t \leq 10$ minutos y de que se atienda exactamente una en el intervalo $10 < t \leq 15$ minutos.

    b) ¿Cuál es el tiempo esperado de llegada para la cuarta llamada?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que se realicen dos o más llamadas en el intervalo $10 < t \leq 20$?

    d) Dado que se atendió una sola llamada en el intervalo $0 < t \leq 15$, calcular la probabilidad de que ocurriera en el intervalo $10 < t \leq 15$.

    e) Dado que se atendió una sola llamada en el intervalo $0 < t \leq 15$, calcular la probabilidad de que al menos una llamada se reciba en el intervalo $15 < t \leq 20$.

7. Una persona vende por correo suscripciones a una revista; sus clientes responden de acuerdo a un proceso de Poisson, con una frecuencia de 6 cada día. Se pueden suscribir durante 1, 2 ó 3 años, lo que hacen independientemente unos de otros con probabilidades respectivas 1/2, 1/3 y 1/6. Por cada suscripción vendida recibe 150 pesetas por suscripción anual en el momento en que se hace la suscripción. Sea $X(t)$ su comisión total por las suscripciones vendidas en el periodo de 0 a t. Hallar

   a) comisión esperada en un año,

   b) la probabilidad de que en una semana no venda ninguna suscripción.

8. La ocurrencia de ciertos siniestros sigue un proceso de Poisson, N_t, con tasa de ocurrencia de 2,5 siniestros por año. El coste de cada siniestro, X_i, se estima en el 20 % de las ocasiones en 10^6 euros y en el 80 % de las ocasiones en $0{,}5 \times 10^6$ euros. Las ocurrencias son independientes entre sí y, por supuesto, independientes del coste que producen.

   a) Para un cierto periodo se sabe que el número de siniestros ha sido 5, ¿qué distribución sigue el coste global? ¿qué se estima como coste global promedio?

   b) Se considera ahora un periodo de tres años y medio, ¿qué se estima como coste global promedio de los siniestros que puedan ocurrir? ¿cuál es la desviación típica del coste global?

9. Los clientes llegan a una oficina según un proceso de Poisson con un promedio de 3 cada hora.

   a) El horario de apertura de la oficina es a las 8 AM pero el encargado se quedó dormido y llegó a las 10 AM. ¿Cuál es la probabilidad de que no llegasen clientes en ese periodo de dos horas?

   b) ¿Cuál es la distribución de la cantidad de tiempo que el encargado tuvo que esperar hasta que llegó el primer cliente desde que llegó al trabajo?

10. Supóngase que $N(t)$ es un proceso de Poisson de parámetro 2. Calcula las siguientes probabilidades:

    a) $P\left(N(3) = 4 \,|\, N(1) = 1\right)$

    b) $P\left(N(1) = 1 \,|\, N(3) = 4\right)$

11. Sea $N(t)$ un proceso de Poisson de parámetro 3. Sea T_n el instante de la n-ésima llegada. Calcula

    a) $E\left[T_{12}\right]$

    b) $E\left[T_{12} \,|\, N(2) = 5\right]$

    c) $E\left[N(5) \,|\, N(2) = 5\right]$

12. El tráfico entre Puertollano y Almodovar del Campo sigue un proceso de Poisson con un promedio de 2/3 de vehículo por minuto. El 10 % de los vehículos con camiones, y el otro 90 % son coches.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos pase un camión en una hora?

b) Dado que han pasado diez camiones en una hora, ¿cuál es le número esperado de coches que han pasado?

c) Dado que han pasado 50 vehículos en una hora, ¿cuál es la probabilidad de que hayan sido exactamente 5 camiones y 45 coches?

13. Los clientes llegan a un banco según un proceso de Poisson con un promedio de 10 a la hora. Dado que en los 5 primeros minutos llegaron 2 clientes

    a) ¿cuál es la probabilidad de que ambos llegasen en los 2 primeros minutos?

    b) ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos llegase en los dos primeros minutos?

14. Dos procesos de Poisson independientes tienen medias λ y μ respectivamente. Encontrar la distribución de la variable número de ocurrencias del primer proceso hasta que se produce la primera ocurrencia del segundo proceso.

15. Una tienda tiene tres puertas de acceso. Las entradas de clientes por cada una siguen procesos de Poisson de tasas $\lambda_1 = 110$, $\lambda_2 = 90$ y $\lambda_3 = 160$ por hora respectivamente. El 30 % de los clientes son hombres. La probabilidad de que un hombre que entra a la tienda compre algo es de 0,80 y que compre una mujer que entra a la tienda, tiene probabilidad de 0,10. El precio medio de un artículo es de 4,5 euros.

    a) ¿Qué promedio total de ventas (euros) se espera para una jornada de 10 horas?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera mujer que compre algo en la tienda llegue en los 15 primeros minutos? ¿qué media de tiempo hay que esperar para su llegada?

16. Sea el proceso $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ siendo N_t un proceso de Poisson de tasa λ y $\{X_i\}$ una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuídas e independientes de N_t. Se supone $\mu_X < \infty$. Entender que este modelo responde, por ejemplo, al pago total de indemnizaciones por siniestros ocurridos durante un tiempo t, sabiendo que la cuantía de cada indemnización es una variable aleatoria dada por X_i.

    a) Calcular $E\left[Z_t \mid N_t = n\right]$ y $E\left[Z_t\right]$.

    b) Calcular $Var\left[Z_t \mid N_t = n\right]$ y $E\left[Z_t^2 \mid N_t = n\right]$.

    c) Calcular $E\left[Z_t^2\right]$ y $Var\left[Z_t\right]$.

17. Un ascensor de un museo recibe una media de 15 grupos por hora y cada grupo puede ser de 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 visitantes con probabilidades 0,05, 0,05, 0,15, 0,25, 0,25 y 0,25 respectivamente. Los tiempos entre llegadas de los grupos se producen a intervalos dados por una distribución exponencial. El 60 % de los visitantes son mujeres. El 70 % de los visitantes son extranjeros.

    a) Calcular el promedio de mujeres extranjeras que durante dos horas determinadas han utilizado el ascensor.

    b) ¿Qué promedio de tiempo transcurrirá entre la llegada del tercer grupo y la del sexto grupo?

18. Sean N_t^1 y N_t^2 dos procesos de Poisson de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Calcular la probabilidad de que en un instante de tiempo t_0, el número de sucesos de uno cualquiera de ellos no haya superado en dos o más al número de sucesos del otro.
Indicación: El suceso requerido es

$$|N_{t_0}^1 - N_{t_0}^2| \leq 1$$

19. Demostrar que el proceso de Poisson N_t no es estacionario en covarianza, pero X_t proceso de *incrementos de Poisson* definido según

$$X_t = N_{t+\alpha} - N_t \qquad con\ \alpha > 0\ fijo,\ t \geq 0$$

es estrictamente estacionario.

20. Dado $N(t)$ proceso de Poisson de parámetro λ, comprueba que

$$\begin{aligned} P\left(N(t)\ es\ impar\right) &= e^{-\lambda t}\sinh\left(\lambda t\right) \\ P\left(N(t)\ es\ par\right) &= e^{-\lambda t}\cosh\left(\lambda t\right) \end{aligned}$$

donde

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad y \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

21. Consideremos un comercio que abre a las 8 AM. Desde las 8 hasta las 11 AM los clientes llegan, en promedio, de manera regular, con una tasa creciente que comienza con una tasa de 5 clientes por hora a las 8 y alcanza su máximo de 20 clientes por hora a las 11 AM. Desde las 11 hasta la 1 PM la tasa promedio parece permanecer constante en 20 clientes por hora. Sin embargo, el promedio de llegadas decae regularmente desde la 1 PM hasta el cierre a las 5 PM momento en el cual la tasa de llegadas es de 12 clientes por hora. Asumiendo que el número de personas que llegan al comercio en tiempos disjuntos es independiente, diseñar un modelo de probabilidad que describa la situación y calcular la probabilidad de que no lleguen clientes entre las 10:30 AM y las 11:30 AM. Calcular el número esperado de clientes durante este periodo. ¿Cuál es el número esperado de clientes en un día?

22. Consideremos un comercio cuyo horario es de 10:00 a 18:00. La tasa de llegadas comienza en 0 a las 10:00, creciendo hasta 4 a las 12:00, hasta 6 a las 14:00, decreciendo hasta 2 a las 16:00 y hasta 0 a las 18:00, de manera que la tasa de llegadas es lineal entre los instantes de tiempo indicados.

    a. ¿Cuál es la distribución del número de llegadas en un día?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que no se produzca ninguna llegada antes del mediodía?

    Considerando que un día determinado el comercio cierra a las 17:30 en lugar de a las 18:00,

    c. ¿cuál es el número esperado de clientes perdidos?
    d. ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos llegue un cliente y se encuentre la tienda cerrada?