Economía de la Integración Europea

Camilo A. Ulloa Ariza
culloa@eco.uc3m.es

Febrero 2009

Part I

Bases Matemáticas & Aplicaciones Económicas

1 Optimización Restringida

$$\max_{\{x_1,...x_n\}} f(x_1,...,x_n)$$
$$s.t. \begin{cases} g_1(x_1,...,x_n) = k_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1,...,x_n) = k_m \end{cases} \tag{1}$$

o

$$\min_{\{x_1,...x_n\}} f(x_1,...,x_n)$$
$$s.t. \begin{cases} g_1(x_1,...,x_n) = k_1 \\ \vdots \\ g_m(x_1,...,x_n) = k_m \end{cases} \tag{2}$$

1.1 Multiplicadores de Lagrange

$$L(x_1, ...x_n) = \left\{ \begin{array}{c} f(x_1, ...x_n) - \lambda_1 (g_1 (x_1, ..., x_n) - k_1) \\ -\lambda_2 (g_2 (x_1, ..., x_n) - k_2) - ... \\ -\lambda_m (g_m (x_1, ..., x_n) - k_m) \end{array} \right\} \tag{3}$$

que es equivalente a

$$L(x_1, ...x_n) = f(x_1, ...x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(g_j (x_1, ..., x_n) - k_j \right) \tag{4}$$

CPO

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L\left(x_1,..,x_n\right)}{\partial x_1} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial L\left(x_1,..,x_n\right)}{\partial x_n} &= 0 \\
\frac{\partial L\left(x_1,..,x_n\right)}{\partial \lambda_1} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial L\left(x_1,..,x_n\right)}{\partial \lambda_m} &= 0 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Example 1 *Funciones de Demanda*

- *Dos bienes de consumo,* x_1 *y* x_2*, que se comercian en un mercado competitivo*

- *Un consumidor representativo (o un continuo de consumidores de masa 1) dotados con* 1 *unidad de trabajo* $(L = 1)$

- *Preferencias:* $U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$

El problema del consumidor (PC):

$$\max_{x_1,x_2} U(x_1, x_2)$$

s.a.

$$P_{x_1}x_1 + P_{x_2}x_2 = WL \tag{6}$$

Definition 2 *La función $g(x, y)$ es homogénea de grado k si:*

$$g(\theta x, \theta y) = \theta^k g(x, y) \tag{7}$$

para todo $\theta > 0$

Noten que la Restricción Presupuestaria (RP) es homogénea de grado cero en precios y salarios:

$$\begin{aligned}(\theta P_{x_1})\, x_1 + (\theta P_{x_2})\, x_2 &= (\theta W)\, L \\ \iff\ & P_{x_1} x_1 + P_{x_2} x_2 = WL \end{aligned} \tag{8}$$

Por lo tanto, si fijamos $\theta = 1/P_{x_2}$ obtenemos que la RP es equivalente a

$$p_{x_1} x_1 + x_2 = wL \tag{9}$$

donde $p_{x_1} = P_{x_1}/P_{x_2}$ y $w = W/P_{x_2}$

Con lo cual, podemos reescribir (PC) como:

$$\max_{x_1,x_2} \ln(x_1) + x_2$$

s.a.

$$p_{x_1}x_1 + x_2 = w \tag{10}$$

El Lagrangiano asociado a este problema es

$$L(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2 - \lambda_1 (p_{x_1}x_1 + x_2 - w) \tag{11}$$

del cual obtenemos las siguientes CPO

$$
\begin{aligned}
\{x_1\} \quad &: \quad \frac{1}{x_1} - \lambda_1 p_{x_1} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad p_{x_1} x_1 = \frac{1}{\lambda_1} && (12) \\
\{x_1\} \quad &: \quad 1 - \lambda_1 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 && (13) \\
\{\lambda_1\} \quad &: \quad p_{x_1} x_1 + x_2 - w = 0 \\
&\Longrightarrow \quad p_{x_1} x_1 + x_2 = w && (14)
\end{aligned}
$$

De (12) y (13):

$$
x_1 \left(p_{x_1}, w\right) = \frac{1}{p_{x_1}} \tag{15}
$$

que es la función de demanda del bien x_1

y (reemplazando en 14):

$$x_2 \left(p_{x_1}, w\right) = w - 1 \tag{16}$$

que es la función de demanda del bien x_2

Example 3 *Función de Oferta*

- *1 bien de consumo, x_1, que se comercia en un mercado competitivo.*
- *Un único factor de producción, L*
- *Una firma representativa (o un continuo de firmas de masa 1)*
- *Tecnología:*

$$x_1 = g(L) = 2L^{1/2} \tag{17}$$

El problema de maximización de la firma (PF)

$$\max_{\{x_1, L\}} \pi\left(x_1, L\right) \equiv P_{x_1} x_1 - WL$$

$s.a.$

$$x_1 = 2L^{1/2} \tag{18}$$

El Lagrangiano asociado es

$$L\left(x_1, L\right) = P_{x_1} x_1 - WL - \lambda_1 \left(x_1 - 2L^{1/2}\right) \tag{19}$$

del que obtenemos las CPO:

$$\begin{aligned}
\{x_1\} \quad &: \quad P_{x_1} - \lambda_1 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad P_{x_1} = \lambda_1 && (20) \\
\{L\} \quad &: \quad -W + \lambda_1 L^{-1/2} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad w = \lambda_1 L^{-1/2} && (21) \\
\{\lambda_1\} \quad &: \quad x_1 - 2L^{1/2} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad x_1 = 2L^{1/2} && (22)
\end{aligned}$$

De (20) y (21):

$$L = \left(\frac{P_{x_1}}{W}\right)^2 \tag{23}$$

que es la función de demanda de L

y (reemplazando en 22):

$$x_1\left(P_{x_1}, W\right) = 2\left(\frac{P_{x_1}}{W}\right) \tag{24}$$

que es la función de oferta de x_1

Notad que $x_1\left(P_{x_1}, W\right)$ es homogénea de grado cero en sus argumentos:

$$\begin{aligned} x_1\left(\theta P_{x_1}, \theta W\right) &= 2\left(\frac{\theta P_{x_1}}{\theta W}\right) \\ &= 2\left(\frac{P_{x_1}}{W}\right) \\ &= x_1\left(P_{x_1}, W\right) \\ &= \theta^0 x_1\left(P_{x_1}, W\right) \end{aligned} \tag{25}$$

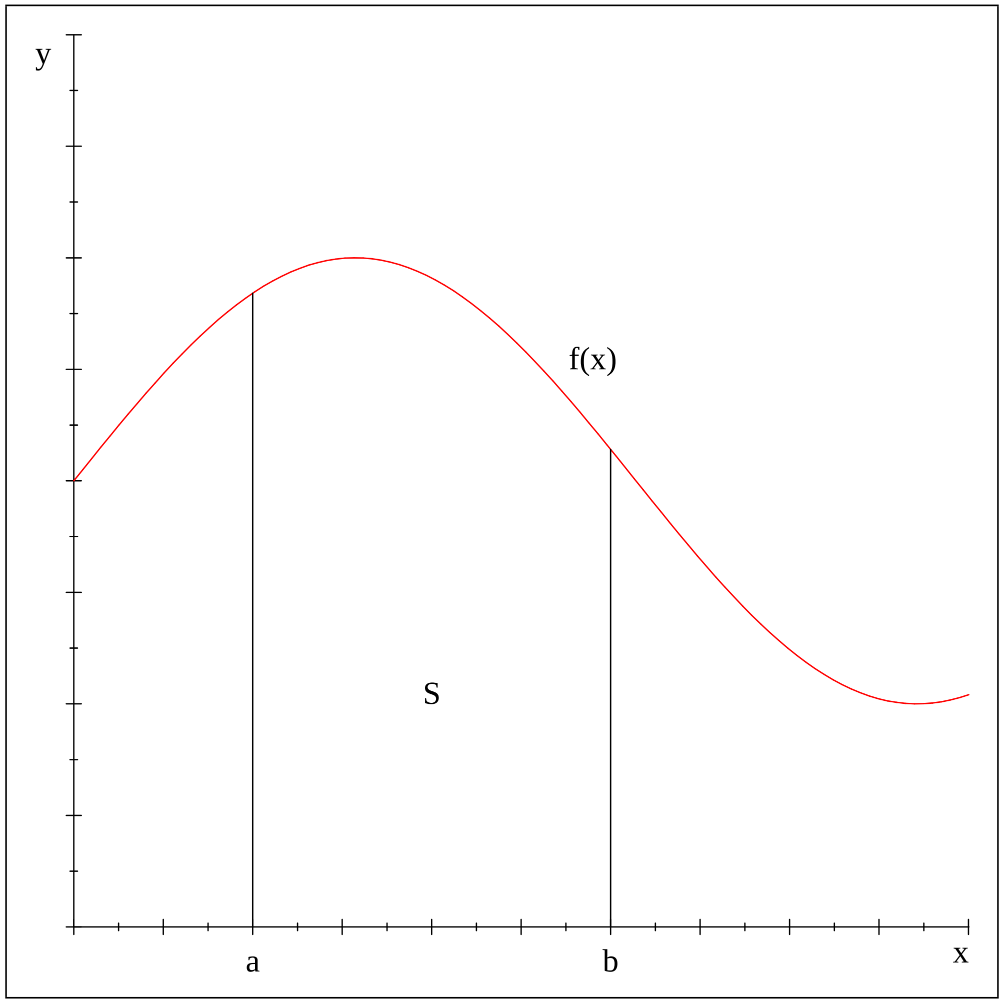
Con lo cual, podemos normalizar bien sea los precios o los salarios (i.e., $\theta = 1/W$)

$$x_1 \left(p_{x_1}, 1\right) = 2p_{x_1} \tag{26}$$

2 La Integral de Riemann

Sea $f(x)$ una función real, no-negativa y contínua (en casi todo punto), definida en el intervalo $[a, b]$, y sea $S = \{(x, y) \,|0 < y < f(x)\}$ la región en el plano bajo la curva $f(x)$. Estamos interasados en medir el área S (véase el gráfico adjunto).

$$S = \int_a^b f(x)\, dx \tag{27}$$


y
f(x)
S
a
b
x

2.1 Interpretación Geométrica:

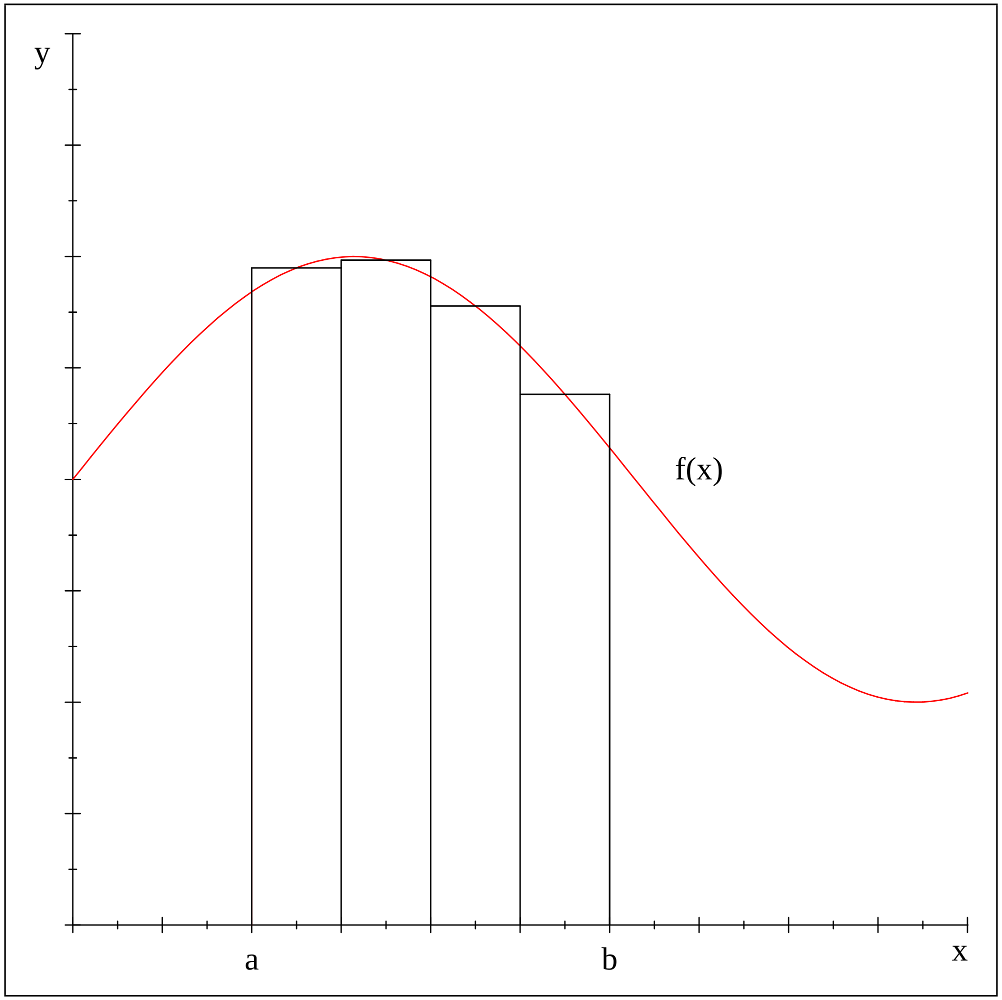
Para obtener una aproximación de S , podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en $n - 1$ sub-intervalos y calcular S como la suma del área de los rectángulos que obtenemos tras la partición. (véase el gráfico adjunto):

$$S \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\widetilde{x}_i) \, \Delta x_i \tag{28}$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{29}$$

$$\widetilde{x}_i = \frac{\Delta x_i}{2}, \ (i.e.) \tag{30}$$


y
f(x)
a
b
x

Claramente,si incrementamos el número de sub-intervalos (o rectángulos) obtenemos una mejor aproximación de S. En el limite, obtenemos la Integral de Riemann que es una de las mejores aproximaciones de S

$$S \cong \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\widetilde{x}_i\right) \Delta x_i \right) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{31}$$

2.2 Propiedades Básicas

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales, no-negativas y contínuas (en casi todo punto), definidas en el intervalo $[a, b]$. Para cualquier constante k y cualquier escalar $c \in [a, b]$ tenemos que:

1. $\int_a^b k dx = kx\rfloor_a^b = (kb + C) - (ka + C) = k(b - a)$

2. $\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

3. $\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$

4. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

2.3 Casos Elementales

Sean $\{c_i\}_{i=1,\ldots n}$ constantes arbitrarias

- Si $f(x) = c_n x^n$ y $n \neq -1$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b c_n x^n dx \\
&= c_n \int_a^b x^n dx \\
&= c_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \Big|_a^b \\
&= \frac{c_n}{n+1} \left[b^{n+1} - a^{n+1} \right] \qquad (32)
\end{aligned}$$

- Si $f(x) = c_n x^n$ y $n = -1$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \frac{c_n}{x} dx \\
&= c_n \int_a^b \frac{1}{x} dx \\
&= c_n \ln(x) + C\rfloor_a^b \\
&= c_n [\ln(b) - \ln(a)] \qquad (33)
\end{aligned}$$

- Si $f(x) = \exp(x)$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \exp(x)\,dx \\
&= \exp(x) + C\rfloor_a^b \\
&= \exp(b) - \exp(a) \qquad (34)
\end{aligned}$$

- Si $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_1 x^1 + c_0$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x)\, dx \\
= \; & \int_a^b \left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_1 x^1 + c_0 \right) dx \\
= \; & c_n \int_a^b x^n dx + c_{n-1} \int_a^b x^{n-1} dx + ... + c_1 \int_a^b x dx + c_0 \int_a^b dx \\
= \; & c_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b + c_{n-1} \frac{1}{n} x^n \Big|_a^b + ... + c_1 \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b + c_0 \frac{1}{1} x \Big|_a^b
\end{aligned}$$

Example 4 *Análisis del Bienestar*

- *1 bien de consumo,* x_1*, que se comercia en un mercado competitivo.*

- *Un único consumidor (o un continuo de consumidores de masa 1) con:*

$$x_1^d\left(p_{x_1}\right) = \frac{1}{p_{x_1}} \tag{35}$$

- *Una única firma (o un continuo de firmas de masa 1) con:*

$$x_1^s\left(p_{x_1}\right) = 2p_{x_1} \tag{36}$$

Definition 5 *En esta economía, un equilibrio competitivo consiste en un perfil de asignaciones* $\left\{x_1^d(p_{x_1}), x_1^s(p_{x_1})\right\}$ *y un precio* $\left\{p_{x_1}\right\}$ *tales que:*

1. *Dado* p_{x_1}*,* $x_1^d(p_{x_1})$ *resuelve el problema de maximización de los consumidores.*

2. *Dado* p_{x_1}*,* $x_1^s(p_{x_1})$ *resuelve el problema de la firma.*

3. *Vaciado de mercados*

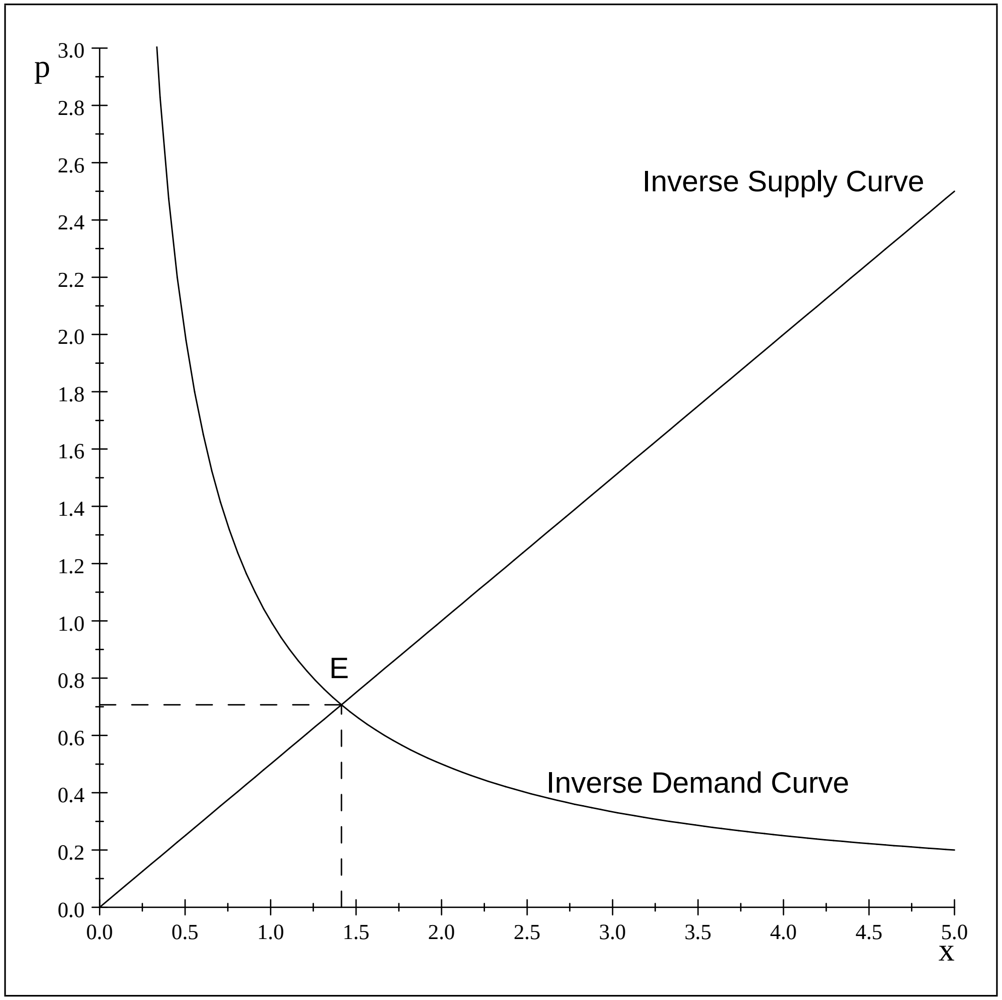
$$x_1^d(p_{x_1}) = x_1^s(p_{x_1}) \tag{37}$$

En nuestro caso (1) y (2) se cumplen trivialmente dado que el problema nos da las funciones de demanda y oferta que resuelven el problema de los consumidores y el problema de la firma. por lo tanto solo tenemos que verificar que (3) se cumple:

$$x_1^d\left(p_{x_1}\right) = x_1^s\left(p_{x_1}\right) \Longrightarrow \frac{1}{p_{x_1}} = 2p_{x_1} \tag{38}$$

$$\Longrightarrow \quad p_{x_1}^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \tag{39}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1^* = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \left(\frac{4}{2}\right)^{1/2} = (2)^{1/2} \tag{40}$$



p
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
x
Inverse Supply Curve
E
Inverse Demand Curve

Supungamos ahora que la función de oferta cambia:

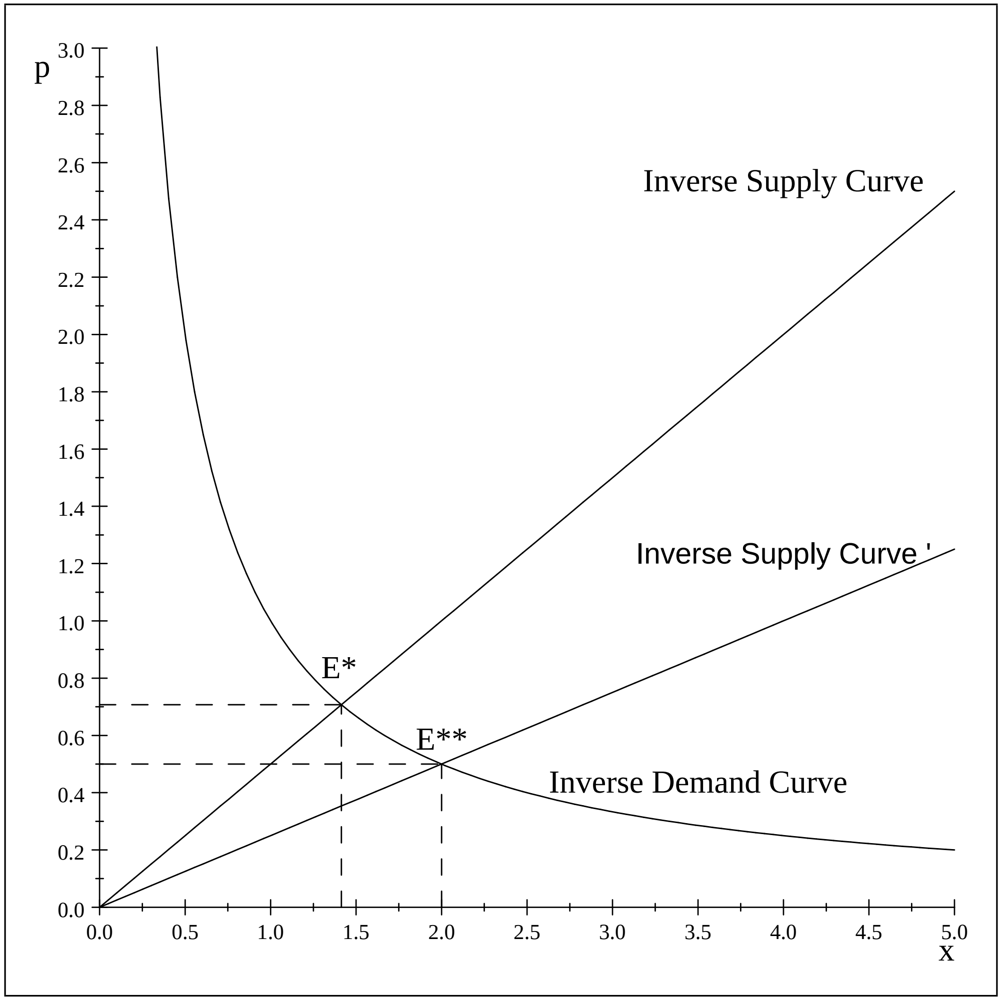
$$x_1^{s\prime}(p_{x_1}) = 4p_{x_1} \tag{41}$$

El nuevo equilibrio para esta economía esta determinado por:

$$x_1^{d}(p_{x_1}) = x_1^{s\prime}(p_{x_1}) \Longrightarrow \frac{1}{p_{x_1}} = 4p_{x_1} \tag{42}$$

$$\Longrightarrow \quad p_{x_1}^{**} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} \tag{43}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1^{**} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \tag{44}$$


p
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
x
Inverse Supply Curve
Inverse Supply Curve '
Inverse Demand Curve
E*
E**

Definition 6 *Excedente del Consumidor*

Es la cantidad de la que se benefician los consumidores al comprar un producto a un precio inferior al precio que estaban dispuestos a pagar inicialmente. Esto es, el area debajo de la curva de demanda y el precio de equilibrio.

Definition 7 *Excedente del Productor*

Es la cantidad de la que se benefician los productores al vender un producto a un precio de mercado que es más alto que el precio al que estaban dispuestos a venderlo. Esto es, el area por encima de la curva de oferta y el precio de equilibrio.

Remark 8 *El execedente del consumidor y el excedente del productor son medidas inperfectas del bienestar de los agentes economómicos. Sin embargo, vamos a trabajar con estas medidas a lo largo del curso puesto que son relativamente sencillas de calcular.*

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, si queremos saber en cuánto cambia el bienestar de los consumidores cuando la economía se mueve desde E^* *hasta* E^{**}*:*

$$
\begin{aligned}
\Delta CS &= \int_{p_{x_1}^{**}}^{p_{x_1}^{*}} x_1^d \left(p_{x_1}\right) dp_{x_1} \\
&= \int_{p_{x_1}^{**}}^{p_{x_1}^{*}} \frac{1}{p_{x_1}} dp_{x_1} \\
&= \ln \left(p_{x_1}\right) \rfloor_{p_{x_1}^{**}}^{p_{x_1}^{*}} \\
&= \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} - \ln \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \ln \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 0.34657 \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Y si queremos saber cómo cambia el bienestar de los productores:

$$\begin{aligned}\Delta PS &= \int_0^{p_{x_1}^*} x_1^s\left(p_{x_1}\right)dp_{x_1} - \int_0^{p_{x_1}^{**}} x_1^{s'}\left(p_{x_1}\right)dp_{x_1}\\ &= 2\int_0^{p_{x_1}^*} p_{x_1}dp_{x_1} - 4\int_0^{p_{x_1}^{**}} p_{x_1}dp_{x_1}\\ &= \frac{2}{2}p_{x_1}^2\Big]_0^{p_{x_1}^*} - \frac{4}{2}p_{x_1}^2\Big]_0^{p_{x_1}^{**}}\\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right]^2 - 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\\ &= 0\end{aligned} \tag{46}$$

Con lo cual el cambio total en el bienestar social es:

$$\Delta W = \Delta CS + \Delta PS = 0.34657 + 0 = 0.34657 \tag{47}$$