1 Cálculo diferencial en varias variables.

1.1 Funciones de varias variables. Límites y continuidad.

Problema 1.1 Indica si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos o cerrados o ninguna de las dos cosas. Señala en cada caso el interior y la frontera y da una representación gráfica:

i) $A = \{ (x,y) \,:\, -1 \le x \le 1, y < 0 \}$.

ii) $B = \{ (x,y) \,:\, x = 1, 1 < y < 2\}$.

iii) $C = \{ (x,y) \,:\, x \ge 1, 0 \le y \le 2x \}$.

iv) $D = \{ (x,y) \,:\, 2x + 3y - 5 = 0 \}$.

v) $E = \{ (x,y) \,:\, x^2 + 3y^2 \le 2 \}$.

vi) $F = \{ (x,y) \,:\, x^2 + 3y^2 < 2 \}$.

vii) $G = \{ (x,y) \,:\, x^2 - 3y^2 = 2 \}$.

viii) $H = \{ (x,y) : y > x^2\}$.

Solución: i) ninguna de las dos cosas, $A^\circ = \{(x,y) : |x| < 1, y < 0\}$, $\partial A = \{(x,y) : |x| = 1 \text{ ó } y = 0\}$; ii) ninguna de las dos cosas, $B^\circ = \emptyset$, $\partial B = \{(x,y) : x = 1, 1 \le y \le 2\}$; iii) cerrado, $C^\circ = \{(x,y) \in C : x > 1, 0 < y < 2x\}$, $\partial C = \{(x,y) : x = 1 \text{ ó } y = 0 \text{ ó } y = 2x\}$; iv) cerrado, $D^\circ = \emptyset$, $\partial D = D$; v) cerrado, $E^\circ = \{(x,y) : \ x^2 + 3y^2 < 2\}$, $\partial E = \{(x,y) : \ x^2 + 3y^2 = 2\}$; vi) abierto, $F^\circ = F$, $\partial F = \{(x,y) : \ x^2 + 3y^2 = 2\}$; vii) cerrado, $G^\circ = \emptyset$, $\partial G = G$; vii) abierto, $H^\circ = H$, $\partial H = \{(x,y) : \ y = x^2\}$.

Problema 1.2 Estudia si los siguientes conjuntos son abiertos, si son cerrados y si son compactos:

(1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5 < x < 7,\ 0 < y < 1\}$,

(2) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$,

(3) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \le x \le 7,\ 0 < y < 1\}$,

(4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \le x \le 7,\ 0 \le y \le 1\}$,

(5) $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| > 3\}$,

(6) $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| \ge 3\}$,

(7) $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| = 5\}$,

(8) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| < 3\}$,

(9) $I = \emptyset$,

(10) $J = \mathbb{R}^N$.

Solución: (1) abierto, (2) abierto, (3) ninguna de las tres cosas, (4) cerrado y compacto, (5) abierto, (6) cerrado, (7) cerrado y compacto, (8) abierto, (9) abierto, cerrado y compacto, (10) abierto y cerrado.

Problema 1.3 Halla el interior, la clausura y la frontera de los conjuntos del ejercicio anterior.

Solución:
(1) $A^\circ = A$, $\overline{A} = D$, $\partial A = \{(x,y) \in D : x = 5 \text{ ó } x = 7 \text{ ó } y = 0 \text{ ó } y = 1\}$;
(2) $B^\circ = B$, $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\}$, $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$;
(3) $C^\circ = A$, $\overline{C} = D$, $\partial C = \partial A$;

(4) $D^\circ = A$, $\overline{D} = D$, $\partial D = \partial A$;
(5) $E^\circ = E$, $\overline{E} = F$, $\partial E = \{\mathbf{x} \in I\!\!R^N : \|\mathbf{x}\| = 3\}$;
(6) $F^\circ = E$, $\overline{F} = F$, $\partial F = \partial E$;
(7) $G^\circ = \emptyset$, $\overline{G} = G$, $\partial G = G$;
(8) $H^\circ = H$, $\overline{H} = \{\mathbf{x} \in I\!\!R^N : \|\mathbf{x}\| \leq 3\}$, $\partial H = \{\mathbf{x} \in I\!\!R^N : \|\mathbf{x}\| = 3\}$;
(9) $I^\circ = \overline{I} = \partial I = I = \emptyset$;
(10) $J^\circ = \overline{J} = \partial J = J = I\!\!R^N$.

Problema 1.4

i) Halla $f(1, y/x)$ si $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

ii) Halla $f(x,y)$ si $f(x+y, y/x) = x^2 - y^2$.

iii) Halla $f(x)$ y $g(x,y)$ si $f(x-y) + g(x,y) = x + y$ con $g(x,0) = x^2$.

iv) La misma pregunta si $f(\sqrt{x} - 1) + g(x,y) = \sqrt{y}$ con $g(x,1) = x$.

Solución: i) $f(1, y/x) = f(x,y)$; *ii)* $\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$; *iii)* $f(x) = x - x^2,\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2y$; *iv)* $f(x) = -2x - x^2,\ g(x,y) = x + \sqrt{y} - 1$.

Problema 1.5 Halla el dominio de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4y^2}$,

iii) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^2}{x - y}$,

iv) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^{1/2}$,

v) $f(x,y) = 1/xy$,

vi) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y)$,

vii) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/y}$,

viii) $f(x,y) = \log(xy)$,

ix) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos(x-y)}$,

x) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{1}{x-y}\right)$,

xi) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{9-y^2}}{1+\sqrt{4-(x^2+z^2)}}$.

xii) $f(x,y) = \dfrac{\log(1+x) + \log(1+y)}{\log(1-x) + \log(1-y)}$.

xiii) $f(x,y) = \log\dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$.

Solución: i) $I\!\!R^2$; *ii)* $\{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ x^2 - 4y^2 \geq 0\}$; *iii)* $\{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ x \neq y\}$; *iv)* $\{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1\}$; *v)* $\{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ xy \neq 0\}$; *vi)* $\{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ -1 \leq x + y \leq 1\}$; *vii)* $\{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ y \neq 0\}$; *viii)* $\{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ \cos(x-y) \neq 0\} = \{(x,y) \in I\!\!R^2 :\ x -$

$y \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}\}$; *ix)* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; xy \geq 0\}$; *x)* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x - y \neq 0\}$; *xi)* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 \geq 9, \, x^2 + z^2 \leq 4\}$; *xii)* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1, \; xy \neq x + y\}$; *xiii)* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| > 1\}$.

Problema 1.6 Halla la imagen de las cinco primeras funciones del problema anterior.

Solución: *i)* $\mathbb{R}$; *ii)* $[0, \infty)$; *iii)* $\mathbb{R}$; *iv)* $[0, \infty)$; *v)* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Problema 1.7 Dibuja las curvas de nivel $f(x,y) = c$ especificadas para las funciones:

$$
\begin{array}{rll}
i) & f(x,y) = xy, & c = 1, -1, 3; \\[1em]
ii) & f(x,y) = \log(x - y), & c = 0, 1, -1; \\[1em]
iii) & f(x,y) = (x + y)/(x - y), & c = 0, 2, -2.
\end{array}
$$

Problema 1.8 Estudia los siguientes límites:

$$
\begin{array}{rlrl}
i) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} & ii) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} \frac{x + y}{x - y} \\[1.5em]
iii) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & iv) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} x}{y} \\[1.5em]
v) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} & vi) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\[1.5em]
vii) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2 - y^2} & viii) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} \\[1.5em]
ix) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & x) & \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2y^2 + (x - y)^2}.
\end{array}
$$

Solución: *i)* no existe; *ii)* no existe; *iii)* 0; *iv)* no existe; *v)* no existe; *vi)* no existe; *vii)* no existe; *ix)* 1; *i)* no existe; *x)* no existe;

Problema 1.9 Se considera la función $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y}{x^4 - y^3}$. Los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ no pertenecen a su dominio. Estudia si pueden definirse $f(0,0)$ y $f(1,1)$ de forma que f sea continua en dichos puntos.

Solución: No se puede en ninguno de los dos casos.

Problema 1.10 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$
i) \; f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}
$$

$$
ii) \; f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}
$$

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2y - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

iv) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

v) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(0,0) = 0$;

vi) $f(x,y) = \dfrac{x + y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(0,0) = 0$;

vii) $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}$;

viii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y} & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y; \end{cases}$

ix) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - y^2} & \text{si } y \neq \pm x^2 \\ 0 & \text{si } y = \pm x^2; \end{cases}$

x) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}(1/x)\operatorname{sen}(1/y) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

Indicación: En el apartado *viii*) saca factor común e^y en el denominador.
Solución: *i*) Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; *ii*) Es continua en todo $\mathbb{R}^2$; *iii*) Es continua en todo $\mathbb{R}^2$; *iv*) Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; *v*) Es continua en todo $\mathbb{R}^2$; *vi*) Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; *vii*) Es continua en todo $\mathbb{R}^2$; *viii*) Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : x_0 = y_0 \neq 0\}$; *ix*) Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : y_0 = \pm x_0^2\}$; *x*) Es continua en $\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : x_0y_0 = 0\}\big) \cup (0,0) \cup \big(\cup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \{(\frac{1}{k\pi},0),(0,\frac{1}{k\pi})\}\big)$.

Problema 1.11 Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

i) Calcular el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de las rectas $y = \lambda x$.

ii) Calcular el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la curva $y = x^3$.

iii) ¿Es f continua en $(0,0)$?

Solución: *i*) 0; *ii*) 1/2; *iii*) No.

Problema 1.12 Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con derivada continua, y sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y} & \text{si} & x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si} & x = y. \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f.

Solución: Usando el teorema del valor medio, se concluye que es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Problema 1.13 Sea $\mathbf{F} : A \subset I\!R^n \to I\!R^m$ una función que verifica

$$||\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})|| \leq K||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^\alpha$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ y constantes $K > 0$ y $0 < \alpha \leq 1$. Demuestra que $\mathbf{F}$ es continua en A.

Solución: Si $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| < \delta$ y si, dado $\varepsilon > 0$ se elige $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$, entonces $||\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})|| < \varepsilon$.

1.2 Derivadas. Diferenciabilidad.

Problema 1.14 Calcula el gradiente de las siguientes funciones:

i) $f(x, y) = 3x^2 - xy + y$

ii) $f(x, y) = x^3 e^{-y}$

iii) $f(x, y) = \log(x^2 + y^4)$

iv) $f(x, y) = (g(x))^2\, h(y)$

v) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

vi) $f(x, y, z) = xe^{y^2} + ye^z$

vii) $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} z + z \operatorname{sen} x$

viii) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + xy + z^2)$

ix) $f(x, y, z) = z^{xy^2}$

x) $f(x, y, z) = (g(x, y))^2 (h(x, z))^3$

xi) $f(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta$

xii) $f(\rho, \varphi, \theta) = \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$

Solución: i) $\nabla f = (6x - y, -x + 1)$; *ii)* $\nabla f = (3x^2 e^{-y}, -x^3 e^{-y})$;
iii) $\nabla f = (2x/(x^2 + y^4), 4y^3/(x^2 + y^4))$; *iv)* $\nabla f = (2g(x)g'(x)h(y), (g(x))^2 h'(y))$;
v) $\nabla f = (-x/\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, -y/\sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$; *vi)* $\nabla f = (e^{y^2}, 2xye^{y^2} + e^z, y)$;
vii) $\nabla f = (\operatorname{sen} y + z\cos x, x\cos y + \operatorname{sen} z, y\cos z + \operatorname{sen} x)$;
viii) $\nabla f = ((1 + y)\cos(x + xy + z^2), x\, \cos(x + xy + z^2), 2z\, \cos(x + xy + z^2))$;
ix) $\nabla f = (y^2 z^{xy^2} \log z, 2xyz^{xy^2} \log z, xy^2 z^{xy^2-1})$; *x)* $\nabla f = (2gg_x h^3 + 3g^2h^2h_x, 2gg_y h^3, 3g^2h^2h_z)$;
xi) $\nabla f = (2r\operatorname{sen}\theta, r^2\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$; *xii)* $\nabla f = (3\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho^3\cos\varphi\cos\theta, -\rho^3\cos\varphi\operatorname{sen}\theta)$.

Problema 1.15 Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

i) Prueba que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

ii) Prueba que f no es continua en $(0, 0)$.

Problema 1.16 Demuestra que las siguientes funciones son diferenciables en los conjuntos que se indican:

i) $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $I\!R^2$.

ii) $f(x,y) = xy$ en $\mathbb{R}^2$.

iii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ en $\mathbb{R}^2$.

iv) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x+y+z)$ en $\mathbb{R}^2$.

v) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ en $\mathbb{R}^2$.

vi) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$ en $\mathbb{R}^2$.

vii) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ en $(x,y) \neq (0,0)$.

Solución: Todas ellas son diferenciables por obtenerse mediante sumas, productos, cocientes y composiciones a partir de funciones diferenciables.

Problema 1.17 Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i) Demuestra que f no es diferenciable en $(0,0)$.

ii) Demuestra que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(0,0)$ pero $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

Problema 1.18 Sea la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

i) Demuestra que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no está definida en $(0,0)$.

ii) ¿Es f diferenciable en (0,0)?

Solución: *ii*) No.

Problema 1.19

i) Estudia la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ii) Calcula las derivadas parciales en $(0,0)$ y estudia allí la diferenciabilidad.

Solución: *i*) f es continua en todo $\mathbb{R}^2$; *ii*) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, f es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 1.20 Sea la función $f(x,y) = |xy|^\alpha$.

i) Si $\alpha > 1/2$. Prueba que $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

ii) Si $\alpha = 1/2$, calcula $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

iii) Demuestra que en este caso f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución: *ii*) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Problema 1.21 Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ indicados:

$$\begin{array}{rll} i) & f(x,y) = x - y + 2, & (x_0,y_0) = (1,3); \\ ii) & f(x,y) = x^2 + 4y^2, & (x_0,y_0) = (2,-1); \\ iii) & f(x,y) = \log(x+y) + x\cos y, & (x_0,y_0) = (1,0); \\ iv) & f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, & (x_0,y_0) = (1,1/2). \end{array}$$

Solución: *i)* $x - y - z = -2$; *ii)* $4x - 8y - z = 8$; *iii)* $2x + y - z = 1$; *iv)* $2x + y - \sqrt{5}z = 0$.

Problema 1.22 Halla la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies en los puntos (x_0, y_0, z_0) indicados:

$$\begin{array}{rll} i) & x^2 + y^2 + z^2 = 3, & (x_0,y_0,z_0) = (1,1,1); \\ ii) & x^3 - 2y^3 + z^3 = 0, & (x_0,y_0,z_0) = (1,1,1); \\ iii) & \mathrm{e}^z \cos x \cos y = 0, & (x_0,y_0,z_0) = (\pi/2,1,0); \\ iv) & \mathrm{e}^{xyz} = 1, & (x_0,y_0,z_0) = (1,2,0). \end{array}$$

Solución: *i)* $x + y + z = 3$; *ii)* $x - 2y + z = 0$; *iii)* $x = \pi/2$; *iv)* $z = 0$.

1.3 Funciones vectoriales y operadores diferenciales.

Problema 1.23 Calcula la matriz jacobiana de las siguientes funciones:

i) $\mathbf{A}(x,y,z) = (x^y, z)$;
ii) $\mathbf{B}(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y)$;
iii) $\mathbf{C}(x) = \big(x + \mathrm{e}^x, x^2, \cos x\big)$;
iv) $\mathbf{D}(x,y) = (x\mathrm{e}^y + \cos y, x, x + \mathrm{e}^y)$;
v) $\mathbf{E}(x,y,z) = (x + \mathrm{e}^z + y, yx^2)$;
vi) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy\mathrm{e}^{xy}, x\operatorname{sen} y, 5xy^2)$;
vii) $\mathbf{G}(x,y,z,t) = x^2 \log t + x\sqrt{z} - ty$.

Solución: *i)* $D\mathbf{A} = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \log x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *ii)* $D\mathbf{B} = (\operatorname{sen} y \cos(x\operatorname{sen} y) \quad x\cos y \cos(x \operatorname{sen} y))$;
iii) $D\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 + e^x \\ 2x \\ \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$; *iv)* $D\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$; *v)* $D\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{pmatrix}$;
vi) $D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + xy^2e^{xy} & xe^{xy} + x^2ye^{xy} & 0 \\ \operatorname{sen} y & x\cos y & 0 \\ 5y^2 & 10xy & 0 \end{pmatrix}$ *vii)* $D\mathbf{G} = (\, 2x\log t + \sqrt{z} \quad -t \quad x/(2\sqrt{z}) \quad x^2/t\,)$;

Problema 1.24

i) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - 3y + 2z, 2x + y - 2z)$. Calcula la matriz jacobiana DT.

ii) Demuestra que toda aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T_A : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \longrightarrow & A\mathbf{x} \end{array}$$

con A una matriz $m \times n$, es diferenciable en todo punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y que $DT_A(\mathbf{a}) = A$.

Solución: $i)$ $DT = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Problema 1.25 Calcula el jacobiano (el determinante de la matriz derivada) de la transformación de

i) coordenadas polares a cartesianas ($\mathbb{R}^2$),

ii) coordenadas cilíndricas a cartesianas ($\mathbb{R}^3$),

iii) coordenadas esféricas a cartesianas ($\mathbb{R}^3$),

iv) coordenadas cilíndricas a esféricas ($\mathbb{R}^3$).

Solución: $i)$ $JT = r$; $ii)$ $JT = r$; $iii)$ $JT = \rho^2 \mathrm{sen}\, \varphi$; $iv)$ $JT = 1/\sqrt{r^2 + z^2} = 1/\rho$.

Problema 1.26 Sea una partícula de masa $m = 3$ que se mueve sobre una trayectoria $\mathbf{s}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \cos t)$ de acuerdo a la ley de Newton (fuerza = masa × aceleración).

i) Calcula la fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = 0$.

ii) Si en el instante $t = 1$ se suelta la partícula (desaparece el campo de fuerzas), y ésta sale por la tangente, calcula en qué punto se encuentra en el instante $t = 2$.

Solución: $i)$ $\mathbf{F} = (3, 3, -3)$; $ii)$ La ecuación vectorial de la recta tangente es $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(1) + t\, \mathbf{s}'(1) = (e, e^{-1}, \cos 1) + t(e, -e^{-1}, -\mathrm{sen}\, 1)$. Por tanto, la partícula se encuentra en el instante $t = 2$ en $\mathbf{r}(1) = (2e, 0, \cos 1 - \mathrm{sen}\, 1)$.

Problema 1.27 Sea una partícula de masa m que se mueve sobre una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbb{R}^3$ de acuerdo a la ley de Newton, en un campo de fuerza $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde V es una función dada de energía potencial.

i) Demostrar que la energía total (cinética + potencial)

$$E(t) = \frac{1}{2} m ||\mathbf{r}'(t)||^2 + V(\mathbf{r}(t))$$

es constante en el tiempo.

ii) Demostrar que si la partícula se mueve sobre una superficie equipotencial, entonces el módulo de la velocidad es constante.

Problema 1.28 Demostrar que las siguientes trayectorias satisfacen la relación $\mathbf{s}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{s}(t))$ para los correspondientes campos (son líneas de flujo)

$$\begin{array}{lll} i) & \mathbf{s}(t) = (t^2, 2t - 1, \sqrt{t}), & \mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1, 2, \frac{1}{2z}); \\[2ex] ii) & \mathbf{s}(t) = (\mathrm{e}^{2t}, \frac{1}{t}, \log t), & \mathbf{F}(x, y, z) = (2x, -y^2, y); \\[2ex] iii) & \mathbf{s}(t) = (\frac{1}{1-t}, \log t, \frac{\mathrm{e}^t}{1-t}), & \mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, \frac{x}{x-1}, z(1 + x)). \end{array}$$

Problema 1.29 Calcula la divergencia y el rotacional de los siguientes campos

i) $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2y, x^3+y^3)$;

ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$;

iii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, -xz, xy)/(x^2+y^2+z^2)$.

Solución: $i)$ $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 6xy+3y^2$; $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$;
$ii)$ $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0$; $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$;
$iii)$ $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{-2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$; $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \Big(\dfrac{x^3-xy^2-xz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \dfrac{2y(x^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \dfrac{x^2z+y^2z-z^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}\Big)$.

Problema 1.30 Escribe la divergencia y el rotacional de cada uno de los campos siguientes:

i) $\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,

ii) $\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$,

iii) $\mathbf{v}(x,y,z) = r^{-2}\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = (x,y,z)$ (posición) y $r = \|\mathbf{r}\|$ (distancia al origen).

Solución: $i)$ $\operatorname{div}\mathbf{v}(x,y,z) = 3$; $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (0,0,0)$; $ii)$ $\operatorname{div}\mathbf{v}(x,y,z) = 6$; $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (0,0,0)$; $iii)$ $\operatorname{div}\mathbf{v}(x,y,z) = -1/r^2$; $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (0,0,0)$.

Problema 1.31 Sea $\mathbf{x} \in I\!R^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, $r = ||\mathbf{x}||$ y k una constante;

i) si $f(\mathbf{x}) = r^k$, calcula ∇f;

ii) si $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = r^k\mathbf{x}$, calcula div $\mathbf{F}$;

iii) si $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = r^k\mathbf{x}$, y $n=3$, calcula rot $\mathbf{F}$;

iv) si $f(\mathbf{x}) = r^k$, calcula Δf.

Solución: $i)$ $kr^{k-2}\mathbf{x}$; $ii)$ $(k+1)r^k$; $iii)$ $(0,0,0)$; $iv)$ $k(k+n-2)r^{k-2}$.

Problema 1.32 Prueba las siguientes identidades que aparecen en análisis vectorial, si f y $\mathbf{F}$ son de clase C^2 (esto implica que las derivadas cruzadas son iguales, es decir, $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j = \partial^2 f/\partial x_j\partial x_i$):

i) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$; $\quad (\nabla\times(\nabla f) = 0)$.

ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$; $\quad (\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0)$.

iii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;

iv) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\nabla f$; $\quad (\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = f\nabla\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f)$.

v) $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f$; $\quad (\nabla\cdot(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)$.

1.4 Regla de la cadena y derivadas direccionales.

Problema 1.33 Halla la derivada direccional en el punto dado en la dirección indicada:

i) $f(x,y) = x^2+y^3$ en $(1,1)$ en la dirección de $(1,-1)$.

ii) $f(x,y) = x + \operatorname{sen}(x+y)$ en $(0,0)$ en la dirección de $(2,1)$.

iii) $f(x,y) = xe^y - ye^x$ en $(1,0)$ en la dirección de $(3,4)$.

iv) $f(x,y)=\dfrac{3x}{x-y}$ en $(1,0)$ en la dirección de $(1,-\sqrt{3})$.

v) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ en $(1,-1,1)$ en la dirección de $(1,-1,2)$.

vi) $f(x,y)=x^2y+xy^2$ en $(1,1)$ en la dirección de $(-1,3)$.

vii) $f(x,y,z)=\log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en $(2,0,1)$ en la dirección de $(1,2,0)$.

viii) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x\cos(yz)$ en $(0,0,0)$ en la dirección $(2,1,-2)$.

ix) $f(x,y)=2x^3y-3y^2$ en $(2,1)$ en la dirección $(a,\sqrt{1-a^2})$. Halla a para que sea máxima.

x) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ en $(1,1,2)$ en la dirección $(10,-1,2)$.

Solución: i) $-1/\sqrt{2}$; *ii*) $\sqrt{5}$; *iii*) $(7-4e)/5$; *iv*) $-3\sqrt{3}/2$; *v*) $\sqrt{6}$; *vi*) $6/\sqrt{10}$; *vii*) $2/5$; *viii*) $2/3$; *ix*) $24a+10\sqrt{1-a^2}$, debe ser $a=12/13$ para que la derivada sea máxima; *x*) $31/\sqrt{105}$.

Problema 1.34 Sea $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+2y}$. Halla el conjunto de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que la derivada direccional de f en el punto (x,y) en la dirección del vector $(4,3)$ sea igual a 2e.

Solución: $\{(x,y):\ x+2y=1\}$.

Problema 1.35 Sea $f(x,y)=1+\operatorname{sen}(3x+y)$. ¿Existe algún vector $v\in\mathbb{R}^2$ tal que la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector v sea igual a 1?

Solución: $v=(0,1),\ v=(3/5,-4/5)$.

Problema 1.36 Sea la función $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

i) Calcula en qué dirección es nula la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$.

ii) La misma pregunta para un punto (x_0,y_0) arbitrario del primer cuadrante.

iii) Utiliza el apartado anterior para describir las curvas de nivel de f.

Solución: *i*) $v=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $v=(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$; *ii*) $v=(x_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2},y_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2})$, $v=(-x_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2},-y_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2})$; *iii*) Son rectas que pasan por el origen.

Problema 1.37 Consideremos las funciones

$$\mathbf{f}(x,y)=(\operatorname{tg}\frac{y}{x}-x+y,\log\frac{y+1}{x})\qquad \mathbf{g}(t,s)=(t\cos s,\mathrm{e}^t,s-2t)$$

$$h(u,v,w)=uv^2\mathrm{e}^w\qquad \mathbf{F}=h\circ\mathbf{g}\circ\mathbf{f}.$$

i) Calcula $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$, Dh, $D\mathbf{F}$.

ii) Calcula el plano tangente a la gráfica de F en el punto $(1,0,F(1,0))$.

iii) Calcula la derivada direccional de F en ese punto en la dirección de $\alpha=(3,-4)$.

Solución: i) $D\mathbf{f}(x,y)=\begin{pmatrix}-\frac{y}{x^2}\sec^2\frac{y}{x}-1 & \frac{1}{x}\sec^2\frac{y}{x}+1\\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{y+1}\end{pmatrix}$; $D\mathbf{g}(t,s)=\begin{pmatrix}\cos s & -t\operatorname{sen} s\\ e^t & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $Dh(u,v,w)=\begin{pmatrix} v^2e^w & 2uve^w & uv^2e^w\end{pmatrix}$; $D\mathbf{F}(x,y)=Dh(\mathbf{g}(\mathbf{f}(x,y)))D\mathbf{g}(\mathbf{f}(x,y))D\mathbf{f}(x,y)$.
ii) $y-z=1$; *iii*) $-4/5$.

Problema 1.38 La temperatura en cada punto de una hoja de metal viene dada por la función

$$T(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x.$$

i) ¿En qué dirección crece la temperatura más rápidamente a partir del punto $(0, 0)$?

ii) ¿Y en qué dirección decrece más rápidamente?

Solución: *i)* $(1, 1)$; *ii)* $(-1, -1)$.

Problema 1.39 La densidad de una bola de metal centrada en el origen viene dada por la función

$$\rho(x, y, z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad k \text{ constante positiva.}$$

i) ¿En que dirección crece la densidad más rápidamente a partir del punto (x, y, z)?

ii) ¿Y en qué dirección decrece más rápidamente?

iii) ¿Cuáles son los coeficientes de variación (derivadas direccionales) de la densidad en (x, y, z) en las direcciones **i, j, k**?

Solución: *i)* $(-x, -y, -z)$; *ii)* (x, y, z); *iii)* $\frac{\partial \rho}{\partial x} = -2kxe^{-(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y} = -2kye^{-(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z} = -2kze^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

Problema 1.40

i) Sea $h(x, y) = 2\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ¿En qué dirección desde $(1, 0)$ se debería comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?

ii) Supongamos que la temperatura en cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ viene dada por la función $T(x, y, z) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2y} + \mathrm{e}^{-3z}$. ¿En qué dirección debe moverse una persona situada en el punto (1,1,1) con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

Solución: *i)* $(-1, 0)$; *ii)* (e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}).

Problema 1.41

i) Dada $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$ y $\mathbf{G}(u, v) = (u + v, u, v^2)$, calcula $D(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(1, 1)$.

ii) Calcula mediante la regla de la cadena

$$\begin{array}{lll} \dfrac{dh}{dx} & \text{donde} & h(x) = f(x, u(x), v(x)) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \text{donde} & h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x)) \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} & \text{donde} & h(x, y, z) = f(u(x, w(y, z)), v(w(y, z), z)) \,. \end{array}$$

iii) Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$, definimos $z(x, y) = f(x + y) + f(x - y)$. Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

iv) Dadas las funciones $u = \log(x + y)$, $v = \operatorname{arctg}(x/y)$, $z = \mathrm{e}^{uv}$, calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

v) Calcula $h'(0)$ si $h = f \circ \mathbf{s}$, donde

$$f(x, y, z) = \frac{\log(1 + x^2 + 2z^2)}{1 + y^2}, \qquad \mathbf{s}(t) = (t + 1, 1 - t^2, \operatorname{sen} t).$$

Solución: $i)$ $D(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; $\quad ii)$ $\dfrac{dh}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\,\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\,\dfrac{dv}{dx}\,,$

$\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial w}\,\dfrac{dw}{dx}\,,\qquad \dfrac{\partial h}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial w}\,\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial w}\,\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial z}\,;$

$iii)$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x+y)+f'(x-y),\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(x+y)-f'(x-y);$

$iv)$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\Big(\dfrac{\arctan(x/y)}{x+y}+\dfrac{y\log(x+y)}{x^2+y^2}\Big)\,e^{\log(x+y)\arctan(y/x)};$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\Big(\dfrac{\arctan(x/y)}{x+y}-\dfrac{x\log(x+y)}{x^2+y^2}\Big)\,e^{\log(x+y)\arctan(y/x)}.$

$v)$ $h'(0)=1/2.$

Problema 1.42 Escribe en coordenadas polares la expresión $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$.