3 Integración en $\mathbb{R}^n$

3.1 Integral múltiple.

Problema 3.1 Calcula $\displaystyle\int_Q f$ en los siguientes casos:

i) $f(x,y) = xy(x+y)$, $Q = [0,1] \times [0,1]$,

ii) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3$, $Q = [0,1] \times [0,1]$,

iii) $f(x,y) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y$, $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$,

iv) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, $Q = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$,

v) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y - ye^x$, $Q = [-1,1] \times [0,\pi/2]$,

Solución: *i*) $1/3$; *ii*) 1; *iii*) $\pi^2/4$; *iv*) 2; *v*) $\pi^2(e-1/e)/8$.

Problema 3.2 Dibuja la región de integración Q y calcula $\displaystyle\int_Q f$ en los siguientes casos:

i) $f(x,y) = x^2 - y$, $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x \in [-1,1],\ -x^2 \le y \le x^2\}$,

ii) $f(x,y) = xy - x^3$, $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x \in [0,1],\ -1 \le y \le x\}$,

iii) $f(x,y) = 2x - \operatorname{sen}(x^2y)$, $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x \in [-2,2],\ |y| \le |x|\}$,

iv) $f(x,y) = y \operatorname{sen} x$, $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |x| + |y| \le 1\}$.

Solución: *i*) $4/5$; *ii*) $-23/40$; *iii*) 0; *iv*) 0.

Problema 3.3

i) Prueba, sin resolver la integral, que

$$4\pi \le \int_D (x^2 + y^2 + 1)\,dx\,dy \le 20\pi\,,$$

donde D es el disco de radio 2 centrado en el origen.

ii) Sea A el cuadrado $[0,2] \times [1,3]$ y sea $f(x,y) = x^2y$. Prueba, sin hacer la integral, que

$$0 \le \int_A f(x,y)\,dx\,dy \le 48\,.$$

iii) Mejora esta última estimación y prueba que

$$3 \le \int_A f(x,y)\,dx\,dy \le 25\,.$$

Indicación: utiliza una partición de A en cuatro cuadrados iguales.

Problema 3.4 Calcula $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$, donde $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

Solución: $2/3$.

Problema 3.5 Determina el recinto de integración y cambia el orden de integración en las siguientes integrales:

$$i)\quad \int_0^3 \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy\,dx \qquad ii)\quad \int_0^1 \int_0^y f(x,y)dx\,dy$$

$$iii)\quad \int_0^{\pi/2} \int_{-\operatorname{sen}(x/2)}^{\operatorname{sen}(x/2)} f(x,y)dy\,dx \qquad iv)\quad \int_1^{\mathrm{e}} \int_0^{\log x} f(x,y)dy\,dx.$$

Solución: *i)* $\{0 \le y \le 4,\ 0 \le x \le 3y/4\} \cup \{4 \le y \le 5,\ 0 \le x \le \sqrt{25-y^2}\}$; *ii)* $\{0 \le x \le y,\ x \le y \le 1\}$; *iii)* $\{-1/\sqrt{2} \le y \le 0,\ -2\operatorname{arcsen} y \le x \le \pi/2\} \cup \{0 \le y \le 1/\sqrt{2}\,,\ 2\operatorname{arcsen} y \le x \le \pi/2\}$; *iv)* $\{0 \le y \le 1,\ \mathrm{e}^y \le x \le \mathrm{e}\}$.

Problema 3.6 Sobre el recinto $R = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ x \ge 0\}$, se consideran las funciones $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $g(x,y) = \operatorname{sen}(y-1)$. Aplica el teorema de Fubini a $\displaystyle\int_R f$ e $\displaystyle\int_R g$ en las dos ordenaciones posibles. Calcula las integrales en el orden más adecuado.

Solución: $\int_R f = 2,\ \int_R g = 0$.

Problema 3.7 Halla el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy\,dx\,.$

Solución: 2.

Problema 3.8 Calcula

i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+y+z)^2\,dxdydz.$

Solución: *i)* 1; *ii)* 2.

Problema 3.9 Calcula las siguientes integrales en los recintos que se indican:

i) $\displaystyle\int_W x^3\,dV$, donde $W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

ii) $\displaystyle\int_W e^{-xy}y\,dV$, donde $W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

iii) $\displaystyle\int_W (2x+3y+z)\,dV$, donde $W = [1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

iv) $\displaystyle\int_W ze^{x+y}\,dV$, donde $W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Solución: *i)* $1/4$; *ii)* $1/e$; *iii)* 7; *iv)* $(e-1)^2/2$.

Problema 3.10 Calcula la integral $\displaystyle\int_W x^2\cos x\,dV$, donde W es la región limitada por los planos $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$ y $x+y=1$. Esboza la región de integración.

Solución: $\pi(4\operatorname{sen}1 + 5\cos 1 - 6)$.

3.2 Cambios de variables en la integral múltiple.

Problema 3.11 Usa una transformación lineal para calcular $\int_S (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\, dxdy$, siendo S el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.

Solución: $13\pi^4/48$.

Problema 3.12 Calcula $\int_D (y-x)\, dxdy$, siendo D la región del plano limitada por las rectas $y = x+1$, $y = x-3$, $y = (7-x)/3$ e $y = 5 - x/3$.

Solución: -8.

Problema 3.13 Sea la aplicación definida por $\left\{ \begin{array}{l} x = u+v \\ y = v-u^2 \end{array} \right.$. Calcula:

i) el jacobiano $J(u,v)$;

ii) la imagen S en el plano XY del triángulo T en el plano UV de vértices (0,0), (2,0) y (0,2);

iii) el área de S;

iv) la integral $\int_S (x-y+1)^{-2} dxdy$.

Solución: *i)* $1+2u$; *iii)* $14/3$; *iv)* $2 + (\pi - 6\operatorname{arctg}(5/\sqrt{3}))\sqrt{3}/9$.

Problema 3.14 Calcula la integral doble $\int\int_D \log(x^2+y^2)\, dx\, dy$ donde D es el recinto del primer cuadrante del plano comprendido entre las curvas $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$.

Solución: $\pi(\log 2 - 3/8)$.

Problema 3.15 Halla la integral de la función

$$f(x,y) = \frac{y^4}{b^4\Big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\Big)\Big(1+\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\Big)} + xy^2$$

sobre el recinto $D = \left\{ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$, donde a y b son constantes positivas.

Solución: $3\pi ab(1-\log 2)/8$.

Problema 3.16 Halla la integral de la función

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sobre los recintos $E = \{\, x^2 + (y-1)^2 \le 1 \,\}$ y $H = \{\, x^2+(y-1)^2 \le 1,\ x \ge 0 \,\}$.

Solución: $\int_E f = 0$, $\int_H f = 2$.

Problema 3.17 Sobre el recinto $R = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ x \ge 0\}$, halla la integral de la función $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{2y^2+x^2}}{y}$.

Solución: $1 + \pi/2$.

Problema 3.18 Calcula la integral $\displaystyle\int_S \frac{x\,dx\,dy}{4x^2+y^2}$, donde S es la región del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y las elipses $4x^2 + y^2 = 16,\ 4x^2 + y^2 = 1$.

Solución: $3/4$.

Problema 3.19 Si R es la región limitada por el plano $z = 3$ y el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, calcula

$$
\begin{aligned}
&i) \quad \int_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\; dxdydz\,, \quad ii) \quad \int_R \sqrt{9-x^2-y^2}\; dxdydz\,,\\
&iii) \quad \int_R z\,\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\; dxdydz\,.
\end{aligned}
$$

Solución: $i)$ $27\pi(2\sqrt{2}-1)/2$; $ii)$ $54\pi - 81\pi^2/8$; $iii)$ $\pi(\mathrm{e}-1)^2/4$.

Problema 3.20 Calcula $\displaystyle\int_W f(x,y,z)\,dxdydz$, donde $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, y W es la región que queda bajo la esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ y sobre el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solución: $\pi(2-\sqrt{2})(1-\mathrm{e}^{-27})/3$.

3.3 Aplicaciones.

Problema 3.21 Calcula las siguientes áreas:

i) área limitada por las curvas $y = x$ e $y = 2 - x^2$;

ii) área de la región $A = \{(x,y) \in I\!R^2 \,:\, x,y > 0,\ a^2y \le x^3 \le b^2y,\ p^2x \le y^3 \le q^2x,\ \}$, donde $0 < a < b$ y $0 < p < q$.

iii) área encerrada por las curvas $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$ y $xy^3 = 15$.

Solución: $i)$ $9/2$; $ii)$ $(b-a)(q-p)/2$; $iii)$ $2\log 3$.

Problema 3.22 Halla los volúmenes de las regiones limitadas por:

i) $z = x^2 + 3y^2,\ z = 9 - x^2$.

ii) $x^2 + 2y^2 = 2,\ z = 0,\ x + y + 2z = 2$.

Solución: $i)$ $9\pi\sqrt{2}/4$; $ii)$ π.

Problema 3.23 Calcula los siguientes volúmenes:

i) volumen de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 \le 4$ y la bola $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$;

ii) volumen del sólido limitado por los conos $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = -1 + \sqrt{x^2+y^2}$;

iii) volumen de la región limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ en $z \geq 0$;

iv) volumen de la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \leq z$ y $z \leq 6/5$;

Solución: *i)* $32\pi(8 - 3\sqrt{3})/3$; *ii)* $2\pi/3$; *iii)* 8π; *iv)* $493\pi/750$.

Problema 3.24 Calcula el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Estudia el caso particular de la bola $a = b = c = R$.

Solución: *i)* $4\pi abc/3$; *ii)* $4\pi R^3/3$.

Problema 3.25 Calcula el volumen comprendido entre el cilindro $r = 4\cos\theta$, la esfera $r^2+z^2 = 16$ y el plano $z = 0$. (Las ecuaciones están expresadas en coordenadas cilíndricas.)

Solución: $64(3\pi - 4)/9$.

Problema 3.26 Halla la masa de la lámina correspondiente a la porción del primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \leq 4$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia al centro del círculo.

Solución: $4\pi\alpha/3$, donde α es la constante de proporcionalidad.

Problema 3.27 Sea S una región del plano limitada por las curvas que se indican. Calcula la masa y el centro de gravedad de S suponiendo que la densidad es constante ρ:

i) $y = x^2$, $x + y = 2$,

ii) $y + 3 = x^2$, $x^2 = 5 - y$,

iii) $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $x \in [0, \pi]$,

iv) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x \in [0, \pi/4]$.

Solución: *i)* $M = 9\rho/2$; $CM = (-1/2, 8/5)$; *ii)* $M = 64\rho/3$; $CM = (0, 1)$; *iii)* $M = \pi\rho/2$; $CM = (\pi/2, 3/8)$; *iv)* $M = (\sqrt{2} - 1)\rho$; $CM = (\pi(2 + \sqrt{2})/4 - \sqrt{2} - 1, (\sqrt{2} + 1)/4)$.

Problema 3.28 Calcula el momento de inercia respecto del eje vertical del sólido

$$V = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

(suponiendo la densidad constante α).

Solución: $16\pi\alpha(32 - 9\sqrt{2})/15$.

Problema 3.29 Sea A el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Calcula su masa total suponiendo que la densidad en el punto $(x, y) \in A$ es $|x - y|$.

Solución: $8/3$.

Problema 3.30 Determina las coordenadas del centro de gravedad de la placa

$$B = \{(x, y) \in I\!R^2\,,\ 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$$

cuya densidad viene dada por la función $f(x, y) = xy$.

Solución: $(14/9, 13/6)$.

Problema 3.31 Una placa metálica viene representada por el conjunto del plano:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, , \, |y| \leq x \leq 1\}$$

y su densidad en P es $f(x, y) = y^2$. Calcula el centro de gravedad y los momentos de inercia con respecto a los ejes.

Solución: $CM = (4/5, 0)$; $I_x = 1/15$; $I_y = 1/9$.

Problema 3.32

i) Calcula el área del conjunto $D = \{\, x = r\,\cos^3 t,\ y = r\,\mathrm{sen}^3\, t,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq t \leq \pi/2\} = \{\, x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1,\ x,\ y \geq 0\}$.

ii) Calcula las coordenadas del centro de masas de D si tiene densidad constante.

Solución: *i)* $3\pi/32$; *ii)* $x_{CM} = y_{CM} = 256/(315\pi)$.

Problema 3.33 El cuadrado Q de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ representa una lámina de densidad constante ρ. Calcula el momento de inercia respecto de la recta $x = y$.

Solución: $\rho/6$.

Problema 3.34 El primer octante de la esfera $x^2+y^2+z^2 = c^2$ se corta con el plano $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} = 1$, $0 < a, b \leq c$. Halla la masa de los dos sólidos resultantes sabiendo que la densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = z$.

Solución: $ab(6c^2 - a^2 - b^2)/24$ y $\pi c^4/16 - ab(6c^2 - a^2 - b^2)/24$.

Problema 3.35 La temperatura en los puntos del cubo $[-1, 1]^3$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

i) Calcula la temperatura media del cubo.

ii) Encuentra en qué puntos del cubo la temperatura coincide con la media.

Solución: *i)* α, donde α es la constante de proporcionalidad; *ii)* la esfera unidad.

Problema 3.36 Calcula el centro de masas de un sólido semiesférico de radio R si su densidad en cada punto es el cuadrado de la distancia del punto al centro.

Solución: $(0, 0, 5R/12)$.

Problema 3.37 Un helado de cucurucho está formado por un cono de barquillo de ángulo α y una semiesfera de helado de radio R. El cucurucho y el helado tienen densidades constantes ρ_c y ρ_h respectivamente. Determina el cociente ρ_h/ρ_c para que el centro de masas del helado esté situado en el plano que separa el helado del barquillo.

Solución: $3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$.