# 5 Transformada de Laplace y ecuaciones diferenciales

## 5.1 Transformada de Laplace.

**Problema 5.1** Demuestra las siguientes propiedades de la función *gamma*, definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

*i)* $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

*ii)* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

*iii)* Deduce de lo anterior que $\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

*iv)* Si $n \in I\!N$, $\Gamma(n+1) = n!$.

*v)* Si $n \in I\!N$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$.

**Problema 5.2** Si $f : [0, \infty) \longrightarrow I\!R$ es integrable, y tiene crecimiento a lo sumo exponencial (es decir, $|f(t)| \leq c\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, para todo $t > T$, donde $c, \alpha, T$ son ciertas constantes que dependen de $f$), la *transformada de Laplace* de $f$ se define mediante

$$L(f)(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt\,.$$

*i)* Prueba que $L(f)(s)$ converge para $s \in (\alpha, \infty)$.

*ii)* Prueba que si $|f(t)| \leq c\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, para todo $t > 0$, entonces

$$\big|L(f)(s)\big| \leq \frac{c}{s - \alpha}\,, \qquad s > \alpha.$$

**Problema 5.3**

*i)* Prueba que si $f(t) \equiv 1$, entonces $L(f)(s) = 1/s$, para $s > 0$.

*ii)* Integrando por partes, prueba que si $f(t) = t^n$, $(n \in I\!N)$, entonces

$$L(f)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,, \qquad s > 0\,.$$

*iii)* Usando la función gamma, prueba que si $f(t) = t^{-1/2}$, entonces

$$L(f)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,.$$

¿Contradice esto el último apartado del ejercicio anterior?

*iv)* Usando la función gamma, prueba que si $f(t)=t^b$, con $b>-1$, entonces

$$L(f)(s)=\frac{\Gamma(b+1)}{s^{b+1}}\,.$$

**Problema 5.4** Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

*i)* $L(\alpha f+\beta g)=\alpha\, L(f)+\beta\, L(g), \qquad \alpha,\beta\in I\!R.$

*ii)* Si se define $f=0$ para $t<0$, entonces si $a>0$ se tiene,

$$L(f(t-a))(s)=\mathrm{e}^{-as}L(f)(s)\,.$$

*iii)* $L(\mathrm{e}^{-at}f(t))(s)=L(f)(s+a), \qquad a\in I\!R.$

*iv)* $L(f(at))(s)=\dfrac{1}{a}\,L(f(t))\Big(\dfrac{s}{a}\Big), \qquad a>0.$

**Problema 5.5** Usando las propiedades anteriores calcula la transformada de Laplace de las funciones siguientes, indicando en cada caso su dominio.

*i)* $f(x)=\mathrm{e}^{ax}, \quad (a\in I\!R),$

*ii)* $f(x)=x\,\mathrm{e}^{ax}, \quad (a\in I\!R),$

*iii)* $f(x)=\mathrm{e}^{x}/\sqrt{x}\,,$

*iv)* $f(x)=x^b\mathrm{e}^{ax}, \quad (a\in I\!R,\ b>-1),$

*v)* $f(x)=\mathrm{sen}(ax), \quad (a\in I\!R),$

*vi)* $f(x)=\cos(ax), \quad (a\in I\!R),$

*vii)* $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx), \quad (a,b\in I\!R),$

*viii)* $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx), \quad (a,b\in I\!R),$

*ix)* $f(x)=\mathrm{sen}^2x,$

*x)* $f(x)=\cos^2x.$

*Solución: i)* $1/(s-a)$, $s>a$; *ii)* $1/(s-a)^2$, $s>a$; *iii)* $\sqrt{\pi/(s-1)}$, $s>1$; *iv)* $\Gamma(b+1)/(s-a)^{b+1}$, $s>a$; *v)* $a/(s^2+a^2)$, $s>0$; *vi)* $s/(s^2+a^2)$, $s>0$; *vii)* $(s+a)/(b^2+(s+a)^2)$, $s>-a$; *viii)* $b/(b^2+(s+a)^2)$, $s>-a$; *ix)* $2/[s(s^2+4)]$, $s>0$; *x)* $(s^2+2)/[s(s^2+4)]$, $s>0$.

**Problema 5.6** Sea $f$ una función continua en $[0,\infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.

*i)* Prueba que si $f$ es derivable en $(0,\infty)$ y $f'$ es continua, entonces

$$L(f')(s)=s\,L(f)(s)-f(0)\,.$$

*ii)* Deduce a partir de *i*) que si $f''$ es continua, entonces

$$L(f'')(s)=s^2\,L(f)(s)-s\,f(0)-f'(0)\,.$$

*iii)* Suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral, prueba que $L(f)$ es derivable y que

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)]=-L(t\,f(t))(s)\,.$$

*iv)* Más aún, suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral, prueba que $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y que

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

**Problema 5.7** Usando el ejercicio anterior si es necesario, halla la transformada de Laplace de las siguientes funciones, indicando en cada caso su dominio:

*i)* $f(x) = x\cos(ax) \quad (a \in \mathbb{R})$,

*ii)* $f(x) = x^2\,\mathrm{sen}(ax) \quad (a \in \mathbb{R})$,

*iii)* $f(x) = \mathrm{sen}^3 x\,$,

*iv)* $f(x) = \cos^3 x\,$.

Indicación: *iii)* $4\,\mathrm{sen}^3 x = 3\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,3x$; *iv)* $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$
*Solución:* *i)* $(s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$, $s>0$; *ii)* $(6as^2-2a^3)/(s^2+a^2)^3$, $s>0$;
*iii)* $6/[(s^2+1)(s^2+9)]$, $s>0$; *iv)* $(s^3+7s)/[(s^2+1)(s^2+9)]$, $s>0$.

**Problema 5.8** Halla la función cuya transformada de Laplace es

| | | | |
|---|---|---|---|
| *i)* | $\dfrac{1}{s^2-1}$ | *ii)* | $\dfrac{1}{(s+1)^2}$ |
| *iii)* | $\dfrac{1}{s(s+1)^2}$ | *iv)* | $\dfrac{1}{s^n} \quad (n \in \mathbb{N})$ |
| *v)* | $\dfrac{1}{(s-1)^2(s^2+1)}$ | *vi)* | $\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$ |
| *vii)* | $\dfrac{s\,\mathrm{e}^{-\pi s/2}}{s^2+a^2}$ | *viii)* | $\dfrac{1}{\sqrt{s}}$. |

*Solución:* *i)* $\mathrm{senh}\;x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$; *ii)* $x\,\mathrm{e}^{-x}$; *iii)* $1-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$; *iv)* $x^{n-1}/(n-1)!$;
*v)* $\frac{1}{2}((x-1)\mathrm{e}^x + \cos x)$; *vi)* $4(1-x)\mathrm{e}^{-4x}$; *vii)* $\cos(a(x-\pi/2))$ si $x \geq \pi/2$, $0$ si $x < \pi/2$;
*viii)* $1/\sqrt{\pi x}$.

## 5.2 Ecuaciones diferenciales.

**Problema 5.9** Resuelve los siguientes problemas de valor inicial

$$i)\ \begin{cases} y' - 3y = \mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} y' + 3y = \operatorname{sen} 2t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases} y' - 5y = \cos 3t \\ y(0) = 1/2 \end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases} y' - 5y = \mathrm{e}^{5t} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

$$v)\ \begin{cases} y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad vi)\ \begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$vii)\ \begin{cases} y'' + 16y = \cos 4t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad viii)\ \begin{cases} y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-3t} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$ix)\ \begin{cases} y'' - 6y' + 9y = t^2\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6 \end{cases} \qquad x)\ \begin{cases} y'' + 4y' + 6y = 1 + \mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

*Solución:* *i)* $y(t) = 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t}$; *ii)* $y(t) = (2\mathrm{e}^{-3t} - 2\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t)/13$;
*iii)* $y(t) = (22\mathrm{e}^{5t} - 5\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t)/34$; *iv)* $y(t) = (t + 1/2)\mathrm{e}^{5t}$;
*v)* $y(t) = (t + t^2/2)\mathrm{e}^{-t}$; *vi)* $y(t) = (\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t})/3$;
*vii)* $y(t) = [(2 + t)\ \operatorname{sen} 4t]/8$; *viii)* $y(t) = (\mathrm{e}^{-3t} + 3\mathrm{e}^{-t} + 6t\mathrm{e}^{-t})/4$;
*ix)* $y(t) = (24 + t^4)\mathrm{e}^{3t}/12$; *x)* $y(t) = (1 + 2\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-2t}\cos(\sqrt{2}\,t) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t))/6$.

**Problema 5.10** Resuelve los siguientes problemas de valor inicial, para $t > 0$:

$$i)\begin{cases} y'''(t) - 4y''(t) - 5y'(t) = 3 \\ y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$ii)\begin{cases} x'''(t) + x''(t) - 6x'(t) = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1. \end{cases}$$

*Solución:* *i)* $y(t) = 4\mathrm{e}^{5t}/75 - 4\mathrm{e}^{-t}/3 + 96/75 - 3t/5$; *ii)* $x(t) = \mathrm{e}^{2t}/10 + \mathrm{e}^{-3t}/15 - 1/6$.

**Problema 5.11** Resuelve, para $\omega \neq \omega_0$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + \omega_0^2\, x = k\operatorname{sen}\omega t, \qquad t > 0 \\ \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

que describe las oscilaciones forzadas de una masa en un resorte no amortiguado. ¿Qué pasa si $\omega = \omega_0$?

**Indicación:** $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} = \frac{1}{2a^3}(\operatorname{sen} at - at\cos at)$.

*Solución:* $x(t) = \frac{k}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0\operatorname{sen}\omega t - \omega\operatorname{sen}\omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}$ si $\omega \neq \omega_0$; $x(t) = \frac{k}{2\omega_0^2}(\operatorname{sen}\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$ si $\omega = \omega_0$.