CALCULO II
GRADOS DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y TELECOMUNICACION
Primera Autoevaluación

Pregunta 1. Como

$$0 \le |f(x,y)| \le \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|\,|y|}{|x|} = |y| \longrightarrow 0$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$, se tiene que f es continua en $(0,0)$. Además,

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,,$$

y

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Por último, tenemos que

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2}\,.$$

Para que f sea diferenciable en $(0,0)$ el límite del miembro izquierdo de esta última igualdad debe existir y ser nulo. Pero, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, y=mx} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

vemos que no existe el límite de $xy/(x^2+y^2)$ ya que depende de la recta por la que nos acerquemos al origen. Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Pregunta 2. Se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

La ecuación del plano tangente es

$$z = f(1,1/2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1/2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1/2)(y-1/2).$$

Como $f(1,1/2) = \sqrt{5}/2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1/2) = 2/\sqrt{5}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1/2) = 1/\sqrt{5}$, sustituyendo en la ecuación anterior y tras reordenar se obtiene que la ecuación del plano tangente pedido es

$$2x + y - \sqrt{5}\,z = 0\,.$$

Pregunta 3. Las fórmulas para pasar de coordenadas cilíndricas a esféricas son

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{r^2+z^2}\,, \\ \theta &= \theta\,, \\ \varphi &= \arctan \dfrac{r}{z}\,. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\det J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial r} & \dfrac{\partial \rho}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \rho}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial r} & \dfrac{\partial \theta}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} & 0 & \dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{r^2+z^2} & 0 & -\dfrac{r}{r^2+z^2} \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} - \frac{z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} = -\frac{1}{\rho}\,.$$

Pregunta 4. Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Por tanto, $\vec{\nabla} f(1,1) = (1,-1)$, y si $\vec{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2 = 1$, como f es diferenciable en $(1,1)$ por ser un cociente de polinomios y no anularse el denominador, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = (1,-1)\cdot(a,b) = a-b\,.$$

Así pues, la derivada direccional es nula si y sólo si $a = b$. Pero como $a^2+b^2 = 1$, ésto implica que $2a^2 = 1$, es decir que $a = \pm 1/\sqrt{2}$. Por tanto,

$$\vec{v} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \qquad \text{ó} \qquad \vec{v} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Pregunta 5. Por la regla de la cadena tenemos que $h(0) = Df(\mathbf{s}(0))\cdot D\mathbf{s}(0)$. Ahora bien

$$Df = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{(1+y^2)(1+x^2+2z^2)} & \dfrac{-2y\log(1+x^2+2z^2)}{(1+y^2)^2} & \dfrac{4z}{(1+y^2)(1+x^2+2z^2)} \end{pmatrix}$$

y

$$D\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{s}(0) = (1,1,0)$, tenemos

$$h'(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\log 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,.$$
