CALCULO II
GRADOS DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y TELECOMUNICACION
Segunda Autoevaluación

Pregunta 1.
a)

$$\begin{aligned}\int_1^2\int_{-1}^1\int_0^1 (2x+3y+z)\,dz\,dy\,dx &= \int_1^2\int_{-1}^1 \Big[2xz+3yz+\frac{z^2}{2}\Big]_{z=0}^{z=1} dy\,dx\\ &= \int_1^2\int_{-1}^1 \Big(2x+3y+\frac{1}{2}\Big)\,dy\,dx\\ &= \int_1^2 \Big[2xy+\frac{3y^2}{2}+\frac{y}{2}\Big]_{y=-1}^{y=1} dx\\ &= \int_1^2 (4x+1)\,dx = [2x^2+x]_{x=1}^{x=2} = 7\,.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 z\,e^{x+y}\,dz\,dy\,dx &= \int_0^1\int_0^1 \Big[e^{x+y}\frac{z^2}{2}\Big]_{z=0}^{z=1} dy\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 e^{x+y}\;dy\,dx\\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 e^x\,dx\Big)\Big(\int_0^1 e^y\,dy\Big) = \frac{1}{2}\,[e^x]_{x=0}^{x=1}\,[e^y]_{y=0}^{y=1} = \frac{(e-1)^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Pregunta 2. a) En el rectángulo A el mínimo valor de f es $m=0$, mientras que el máximo valor de f es $M=2^2(-3)^2=36$. Por tanto, como el área de A es $|A|=4$,

$$0 = m|A| \le \int_A f(x,y)\,dx\,dy \le M|A| = 36\cdot 4 = 144\,.$$

b) Dividiendo A en los cuatro sub-rectángulos $A_1=[0,1]\times[-2,-1]$, $A_2=[1,2]\times[-2,-1]$, $A_3=[0,1]\times[-3,-2]$, $A_4=[1,2]\times[-3,-2]$ tenemos que los máximos y mínimos de f en cada uno de estos sub-rectángulos es:

$$m_1=0, M_1=4, \qquad m_2=1, M_2=16, \qquad m_3=0, M_3=9, \qquad m_4=4, M_4=36\,.$$

Por tanto, como el área de todos los sub-rectángulos es $|A_i|=1$,

$$5 = 0+1+0+4 = \sum_{i=1}^4 m_i|A_i| \le \int_A f(x,y)\,dx\,dy \le \sum_{i=1}^4 M_i|A_i| = 4+16+9+36 = 65\,.$$

Pregunta 3.
a)

$$\int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

b)

$$\int_1^e\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{e^y}^e f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Pregunta 4. a) Hacemos el cambio de variable $T^{-1} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R^2}$ dado por las ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} u = y - x\,, \\ v = y + \frac{x}{3}\,, \end{array} \right.$$

ya que en las nuevas variables el dominio de integración es $D^* = \{(u, v) :\ -3 \leq u \leq 1\,,\ \frac{7}{3} \leq v \leq 5\}$, es decir, un rectángulo! Despejando las variables x, y obtenemos el cambio de variable inverso $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R^2}$ que viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}\,u + \frac{3}{4}\,v\,, \\ x = \frac{1}{4}\,u + \frac{3}{4}\,v\,. \end{array} \right.$$

El valor absoluto del determinante Jacobiano es

$$|JT| = \left| \left| \begin{array}{cc} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right| \right| = \frac{3}{4}\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int\int_D (y - x)\, dx\, dy = & \int_{-3}^{1} \int_{7/3}^{5} u\, \frac{3}{4}\, dv\, du \\ = & \frac{3}{4} \int_{-3}^{1} [uv]_{v=7/3}^{v=5} du = 2 \int_{-3}^{1} u\, du = 2 \left[\frac{u^2}{2} \right]_{u=-3}^{u=1} = -8\,. \end{aligned}$$

Pregunta 5. a) Expresando la integral en coordenadas cilíndricas tenemos

$$\begin{aligned} \int\int\int_W z\, e^{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 z\, e^{r^2+z^2}\, r\, dz\, dr\, d\theta \\ = & 2\pi \int_0^1 r\, e^{r^2} \left[\frac{e^{z^2}}{2} \right]_{z=r}^{z=1} dr = \pi \int_0^1 r\, e^{r^2}\, (e - e^{r^2})\, dr \\ = & \pi e \int_0^1 r\, e^{r^2}\, dr - \pi \int_0^1 r\, e^{2r^2}\, dr \\ = & \pi e \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=1} - \pi \left[\frac{e^{2r^2}}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = \pi e\, \frac{e-1}{2} - \pi\, \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{\pi}{4}\, (e-1)^2\,. \end{aligned}$$