APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEGUNDO CURSO DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

2. ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

2.1. Ecuaciones de segundo orden incompletas.

Si no aparece y. La ecuación $F(x, y', y'') = 0$, se transforma en una ecuación de primer orden con el cambio de variable $p(x) = y'(x)$, quedando $F(x, p, p') = 0$.

Si no aparece x. La ecuación $F(y, y', y'') = 0$, se transforma en una ecuación de primer orden con el cambio de variable

$$y' = p(y)\,, \qquad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}\,,$$

quedando $F(y, p, p\,dp/dy) = 0$.

2.2. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y ecuaciones de orden superior.

2.2.1. Teoremas de existencia y unicidad de solución.

Teorema 1. Sea el sistema

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)\,, \tag{1}$$

donde $f : D \subseteq \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ (D abierto) es tal que $f, \partial f/\partial x_j (j = 1, \dots, n)$ son continuas en D.

Entonces, para cada $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, existe una única solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) que satisface $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ y que está definida en un entorno $(t_0 - h, t_0 + h)$ de t_0.

Teorema 2. Sea la ecuación

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})\,, \tag{2}$$

donde $f : D \subseteq \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ (D abierto) es tal que $f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial x', \dots, \partial f/\partial x^{(n-1)}$ son continuas en D.

Entonces, para cada $(t_0, x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0n-1}) \in D$, existe una única solución $\mathbf{x}(t)$ de (2) que satisface

$$x(t_0) = x_{00}\,,\ x'(t_0) = x_{01}\,, \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n-1}$$

y que está definida en un entorno $(t_0 - h, t_0 + h)$ de t_0.

Teorema 3. Sea la ecuación

$$\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x} + B(t)\,, \tag{3}$$

donde $A(t), B(t)$ son continuas en (m_1, m_2).

Entonces, para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n, t_0 \in (m_1, m_2)$, existe una única solución $\mathbf{x}(t)$ de (3) tal que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ y que está definida en (m_1, m_2).

Teorema 4. Sea la ecuación

$$x^{(n)} = a_0(t)\,x + a_1(t)\,x' + \dots + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + b(t)\,, \tag{4}$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son continuas en (m_1, m_2).

Entonces, para cada $x_{00}, x_{01}, \ldots, x_{0n-1} \in \mathbf{R}, t_0 \in (m_1, m_2)$, existe una única solución $x(t)$ de (4) tal que

$$x(t_0) = x_{00}\,,\ x'(t_0) = x_{01}\,, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n-1}\,,$$

y que está definida en (m_1, m_2).

2.2.2. Solución de sistemas lineales.

Teorema 5. Sea el sistema lineal homogéneo de n ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x}\,, \tag{5}$$

donde $A(t)$ es continua en (m_1, m_2).

Entonces, la solución general (el conjunto de soluciones) de (5) es un espacio vectorial de dimensión n.

Teorema 6. Sea el sistema lineal de n ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x} + B(t)\,, \tag{6}$$

donde $A(t), B(t)$ son continuas en (m_1, m_2).

Entonces, la solución general de (6) se obtiene sumando a una solución particular de (6) la solución general de (5).

Método de variación de las constantes.

Si $\mathbf{x}(t) = c_1\,\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots c_n\,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ es la solución general de (5), una solución particular de (6) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1(t)\,\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots c_n(t)\,\boldsymbol{\varphi}_n(t)\,.$$

2.2.3. Solución de sistemas lineales con coeficientes constantes.

Consideremos el sistema

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + B(t)\,, \qquad A \text{ matriz } n \times n \text{ constante.}$$

Teorema 7. Sea $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ el polinomio característico de la matriz A.

• Si λ_0 es una raíz del polinomio característico, entonces

$$\exists\, c_1, \ldots, c_n \ \text{ tales que } \ \mathbf{x}(t) = e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \ \text{ satisface } \ \mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}\,.$$

De hecho puede tomarse como $(c_1, \ldots, c_n)$ un autovector correspondiente al autovalor λ_0.

• Si λ_0 es una raíz de multiplicidad r del polinomio característico, entonces existen r soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ de la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}\,,$$

con $p_j(t)$ polinomios de grado $\leq r - 1$.

Consideremos la ecuación lineal completa

$$\text{(EC)} \qquad x^{(n)} + a_{n-1}\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x = b(t)\,,$$

su ecuación homogénea asociada

$$\text{(EH)} \qquad x^{(n)} + a_{n-1}\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x = 0\,,$$

y su polinomio característico

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_1\, \lambda + a_0\ .$$

Teorema 8.

- Si λ_0 es raíz del polinomio característico, entonces $x(t) = c\, e^{\lambda_0 t}$ es solución de (EH), para todo $c \in \mathbf{C}$.
- Si λ_0 es raíz del polinomio característico de multiplicidad r, entonces

$$x(t) = (c_0 + c_1\, t + \cdots + c_{r-1}\, t^{r-1})\, e^{\lambda_0 t}$$

es solución de (EH), para todo $c_i \in \mathbf{C}$.

Observación 1. Si $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ y $\bar\lambda_0 = \alpha - i\beta$ son raíces del polinomio característico, entonces, para todos $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$,

$$x(t) = c_1\, e^{\lambda_0 t} + c_2\, e^{\bar\lambda_0 t}$$

es solución de (EH), por lo que también lo es

$$x(t) = k_1\, e^{\alpha t} \cos \beta t + k_2\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t\,,$$

para todos $k_1, k_2 \in \mathbf{C}$.

Observación 2. Para encontrar una solución particular de (EC) se puede transformar (EC) en un sistema de n ecuaciones de primer orden y aplicar el método de variación de las constantes.

Teorema 9. Supongamos que $b(t) = p(t)\, e^{\lambda t}$ con p polinomio de grado m.

- Si λ no es raíz del polinomio característico, entonces existen $b_0, b_1, \ldots, b_m$ tales que

$$x(t) = (b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0)\, e^{\lambda t}$$

es solución particular de (EC).

- Si λ es raíz de multiplicidad r del polinomio característico, entonces existen $b_0, b_1, \ldots, b_m$ tales que

$$x(t) = (b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0)\, t^r\, e^{\lambda t}$$

es solución particular de (EC).

Observación 3. En particular, lo anterior se aplica si $b(t)$ es un polinomio de grado m ($\lambda = 0$).

Observación 4. Supongamos que

$$b(t) = p(t)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + q(t)\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

con p y q polinomios, $m = \max\{\operatorname{grado} p, \operatorname{grado} q\}$.

• Si $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$ no son raíces del polinomio característico, entonces existen $d_0, d_1, \ldots, d_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ tales que

$$x(t) = (d_m t^m + \cdots + d_1 t + d_0)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + (b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0)\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

es solución particular de (EC).

• Si $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$ son raíces de multiplicidad r del polinomio característico, entonces existen $d_0, d_1, \ldots,$ d_m, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ tales que

$$x(t) = (d_m t^m + \cdots + d_1 t + d_0)\, t^r\, e^{\alpha t} \cos \beta t + (b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0)\, t^r\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

es solución particular de (EC).

Teorema 10. Si x_j es solución particular de

$$x^{(n)} + a_{n-1}\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x + a_0 = b_j(t)$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$, entonces $x = \sum_{j=1}^{m} x_j$ es solución de

$$x^{(n)} + a_{n-1}\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x + a_0 = \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\,.$$