APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEGUNDO CURSO DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

4. SISTEMAS AUTONOMOS

En lugar de estudiar los sistemas $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, vamos a estudiar los sistemas *autónomos*, que son los que pueden escribirse como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \,. \tag{1}$$

Estos sistemas presentan la particularidad de que si $\mathbf{x}(t)$ es una solución, entonces $\mathbf{x}(t+c)$ también es solución para toda constante c.

Definición. Si $\mathbf{x}_0$ verifica $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$, entonces la función $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ es solución de (1). Denominaremos *puntos críticos, trayectorias de equilibrio o soluciones de equilibrio* a este tipo de soluciones, que son independientes de t.

Definición. La solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (1) es *estable* si toda solución $\psi(t)$ de (1) que comienza cerca de $\phi(0)$, permanece cerca de $\phi(t)$ para todo $t > 0$. La solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (1) es *inestable* si existe al menos una solución $\psi(t)$ de (1) que comienza cerca de $\phi(0)$, pero que no permanece cerca de $\phi(t)$ para todo $t > 0$. Más precisamente, la solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (1) es *estable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que para toda solución $\psi(t)$ de (1)

$$\| \psi(t) - \phi(t) \| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad \| \psi(0) - \phi(0) \| < \delta(\varepsilon) \,.$$

Definición. La solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (1) es *asintóticamente estable* si es estable y si toda solución $\psi(t)$ de (1) que comienza suficientemente cerca de $\phi(0)$ en $t = 0$, se aproxima a $\phi(t)$ cuando t tiende a ∞. En particular, una solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ de (1) es *asintóticamente estable* si toda solución $\psi(t)$ de (1) que comienza suficientemente cerca de $\mathbf{x}_0$ en $t = 0$, no sólo permanece cerca de $\mathbf{x}_0$ para todo $t > 0$, sino que además se aproxima a $\mathbf{x}_0$ cuando t tiende a ∞.

Si el sistema (1) es lineal, es decir, si existe una matriz $\mathbf{A}$ con coeficientes reales (o complejos) tal que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \,, \tag{2}$$

existe un criterio sencillo para determinar la estabilidad de las soluciones:

Teorema 1.

(a) Toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es asintóticamente estable si todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real estrictamente negativa.

(b) Toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es inestable si al menos un autovalor de $\mathbf{A}$ tiene parte real estrictamente positiva.

(c) Supongamos que todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real menor o igual que 0 y que $\lambda_1 = i\sigma_1, ..., \lambda_l = i\sigma_l$ son todos los que tienen parte real 0. Sea k_j la multiplicidad de $\lambda_j = i\sigma_j$. Esto significa que el polinomio característico de $\mathbf{A}$ puede factorizarse como

$$P(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} ... (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} Q(\lambda) \,,$$

donde todas las raíces de Q tienen parte real estrictamente negativa. Entonces, toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es estable (pero no asintóticamente estable) si para todo $j = 1, ..., l$, $\mathbf{A}$ tiene k_j autovectores linealmente independientes para el autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$. En otro caso, toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es inestable.

Corolario para $n = 2$.

(a) Toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es asintóticamente estable si todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real estrictamente negativa.

(b) Toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es inestable si al menos un autovalor de $\mathbf{A}$ tiene parte real estrictamente positiva.

(c) Supongamos que todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real menor o igual que 0 y que λ_1 tiene parte real 0. Si λ_1 es una raíz doble y no existen dos autovectores correspondientes a λ_1 linealmente independientes, entonces toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es inestable. En otro caso, toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es estable (pero no asintóticamente estable).

Teorema 2. La estabilidad de cualquier solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de la ecuación no homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ es equivalente a la estabilidad de cualquier solución de la ecuación homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Usando los resultados del caso lineal, se puede decir mucho acerca de la estabilidad de las soluciones de equilibrio del sistema (1):

Teorema 3. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ una solución de equilibrio del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{f}$ es una función de clase C^1 en un entorno de $\mathbf{x}_0$. Sea $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ la matriz derivada de la función $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{x}_0$.

(a) La solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ es asintóticamente estable si todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real estrictamente negativa.

(b) La solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ es inestable si al menos un autovalor de $\mathbf{A}$ tiene parte real estrictamente positiva.

(c) La estabilidad de la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ no puede determinarse a priori si todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real menor o igual que 0 y existe al menos un autovalor con parte real 0.

Teorema 4 (Criterio de Routh-Hurwitz). Todas las raíces del polinomio $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$ tienen parte real estrictamente negativa si y sólo si $D_k > 0$ para $k = 1, ..., n$, donde se define $D_1 = a_1$ y para $k > 2$

$$D_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix},$$

donde $a_j = 0$ si $j > n$.

Corolario. En los siguientes casos, las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte real estrictamente negativa si y sólo si

(a) a_1 y a_2 son estrictamente positivos, cuando $n = 2$,
(b) a_1, a_2 y a_3 son estrictamente positivos y $a_1a_2 - a_3 > 0$, cuando $n = 3$,
(c) a_1, a_2, a_3 y a_4 son estrictamente positivos y $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_4a_1^2 > 0$, cuando $n = 4$.

El siguiente teorema resulta muy útil para dibujar trayectorias cerradas en los diagramas de fase.

Teorema 5. Consideremos el sistema de dos ecuaciones diferenciales $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$, donde F es una función impar en y (es decir, $F(x, -y) = -F(x, y)$) y G es una función par en y (es decir, $G(x, -y) = G(x, y)$). Entonces el diagrama de fases del sistema tiene trayectorias simétricas con respecto al eje X.

Cabe destacar que bajo las hipótesis del teorema anterior, las trayectorias son simétricas con respecto al eje X, pero no son simétricas las flechas que indican el sentido de las trayectorias; de hecho, las flechas apuntan en sentido contrario en el semiplano superior y en el semiplano inferior.

Teorema 6. Consideremos el sistema de dos ecuaciones diferenciales $x' = F(x, y),\ y' = G(x, y)$, donde F es una función par en x (es decir, $F(-x, y) = F(x, y)$) y G es una función impar en x (es decir, $G(-x, y) = -G(x, y)$). Entonces el diagrama de fases del sistema tiene trayectorias simétricas con respecto al eje Y.