APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SEGUNDO CURSO DE INGENIEROS INDUSTRIALES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

3. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dada $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$, se dice que f tiene **crecimiento a lo sumo exponencial** si para algún $\alpha \in \mathbf{R}$ se verifica $\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-\alpha t} = 0$. En ese caso podemos definir la **transformada de Laplace de** f para $s > \alpha$, como la integral

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\,.$$

La transformada de Laplace tiene las siguientes propiedades:

$L(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha\, L(f)(s) + \beta\, L(g)(s) \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

$L(e^{at} f(t))(s) = L(f)(s - a) \qquad a \in \mathbf{R}$.

$L(f(at))(s) = \dfrac{1}{a}\, L(f(t))\big(\dfrac{s}{a}\big) \qquad a > 0$.

Teorema 1. Sea f una función continua en $[0, \infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.
(1) Si f es derivable en $[0, \infty)$ y f' es continua con crecimiento a lo sumo exponencial, entonces

$$L(f')(s) = s\, L(f)(s) - f(0)\,.$$

(2) Si f es derivable dos veces en $[0, \infty)$ y f' y f'' son continuas con crecimiento a lo sumo exponencial, entonces

$$L(f'')(s) = s^2\, L(f)(s) - s\, f(0) - f'(0)\,.$$

(3) $L(f)$ es derivable y

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = -L(t\, f(t))(s)\,.$$

(4) $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Teorema 2. Si f es continua en $[0, \infty)$ y tiene crecimiento a lo sumo exponencial, entonces lo mismo es válido para la función

$$g(t) = \int_0^t f(x)\, dx\,,$$

y además

$$L(g)(s) = \frac{1}{s}\, L(f)(s)\,.$$

Teorema 3. Si f es continua en $[0, \infty)$ y tiene crecimiento a lo sumo exponencial, $a \geq 0$ y $H(t)$ es la función salto definida como $H(t) = 0$ para $t < 0$ y $H(t) = 1$ para $t \geq 0$, entonces

$$L(f(t - a)H(t - a))(s) = e^{-as} L(f)(s)\,.$$

Teorema 4. Si f y g son continuas en $[0, \infty)$ y tienen crecimiento a lo sumo exponencial, entonces lo mismo es válido para su convolución, definida como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x) g(t - x)\, dx\,,$$

y además

$$L(f * g)(s) = L(f)(s)\, L(g)(s)\,.$$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 1\,, & L(f)(s) &= \frac{1}{s}\,,\\
f(t) &= t^n\,, & L(f)(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}\,,\\
f(t) &= t^a\,, & L(f)(s) &= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\,,\\
f(t) &= \sin(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \cos(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \frac{\sin(at)}{t}\,, & L(f)(s) &= \arctan\frac{a}{s}\,,\\
f(t) &= e^{at}\,, & L(f)(s) &= \frac{1}{s-a}\,,\\
f(t) &= e^{at}t^b\,, & L(f)(s) &= \frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}\,,\\
f(t) &= e^{at}\sin(bt)\,, & L(f)(s) &= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,,\\
f(t) &= e^{at}\cos(bt)\,, & L(f)(s) &= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\,,\\
f(t) = \sinh(at) &= \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\,, & L(f)(s) &= \frac{a}{s^2-a^2}\,,\\
f(t) = \cosh(at) &= \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\,, & L(f)(s) &= \frac{s}{s^2-a^2}\,,\\
f(t) &= \delta(t-a)\,, & L(f)(s) &= e^{-as}\,.
\end{aligned}
$$