PROBLEMAS DE EDO
2^{o} Ing. Industrial
CURSO 2009–2010

1 Ecuaciones de primer orden.

1.1 Métodos elementales de integración

Problema 1.1.1 Integrar las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{array}{llll}
i) & xyy' = y - 1 & ii) & xy' = (x+1)(y-1) \\
iii) & y' + y \operatorname{tg} x = 0 & iv) & y' = \mathrm{e}^{3x-2y} \\
v) & y' = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3} & vi) & (4y + yx^2)dx - (2x + xy^2)dy = 0
\end{array}
$$

Problema 1.1.2 Integrar las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{array}{llll}
i) & x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0 & ii) & xy' = y + \sqrt{x^2+y^2} \\
iii) & x^2y' = xy + 3(x^2+y^2)\arctan\dfrac{y}{x} & iv) & -ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0 \\
v) & xy' = y + 2x\mathrm{e}^{-y/x} & vi) & y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}
\end{array}
$$

Problema 1.1.3 Integrar las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{array}{llll}
i) & (y - x^3)dx + (x - \mathrm{e}^{2y})dy = 0 & ii) & (12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 3)dy = 0 \\
iii) & y' = \dfrac{-y}{x + y^3} & iv) & (\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y)dx + (\mathrm{e}^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0 \\
v) & \dfrac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}dx + \dfrac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}dy = 0 & vi) & (2xy^3 + y\cos x)dx + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)dy = 0
\end{array}
$$

Problema 1.1.4 Resolver los problemas siguientes:

i) hallar una función $y = y(x)$, tal que $y' = \mathrm{e}^{x-y}$, $\quad y(0) = \log 2$;

ii) hallar una función $y = y(x)$, tal que $y' = \dfrac{xy + y}{x - 1}$, $\quad y(0) = 2$;

iii) hallar una función $y = y(x)$, tal que $(y')^2 = 9y^4$, $\quad y(1/3) = 1/2$, y tal que $y \in C([1/3, \infty))$;

iv) hallar una curva en el plano (x, y) tal que $xdx + ydy = 0$ y que pase por el punto $(3, 4)$.

Problema 1.1.5 Sea la ecuación $f(y)dx - (2xy + y^2)dy = 0$.

i) Determinar para qué funciones $f(y)$ la ecuación es exacta y resolverla para esas funciones.

ii) Calcular un factor integrante de la forma $\mu = \mu(y)$ para cada f.

iii) Resolver la ecuación si $f(y) = y$.

Problema 1.1.6 Resolver las ecuaciones siguientes encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable:

$$i)\quad (4x+3y^3)dx+3xy^2dy=0 \qquad ii)\quad (4xy^2+y)dx+(6y^3-x)dy=0$$

$$iii)\quad 2xdx-x^2\operatorname{cotg} y dy=0 \qquad iv)\quad (2x+y)dx+(x^2+xy+x)dy=0$$

Problema 1.1.7 Dada la ecuación diferencial $P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$, hallar la condición que han de cumplir P y Q para que admita un factor integrante que sea función de $t+x$. Aplicar el resultado anterior a la resolución de la ecuación $(2tx-t^2-t)dx+(2tx-x^2-x)dt=0$.

Problema 1.1.8 Resolver la ecuación $(7x^4y-3y^8)dx+(2x^5-9xy^7)dy=0$ encontrando un factor integrante de la forma x^ny^m.

Problema 1.1.9 Hallar un factor integrante para la ecuación $(3y^2-x)dx+2y(y^2-3x)dy=0$ de la forma $\mu=\mu(x+y^2)$.

Problema 1.1.10

i) Resolver la ecuación diferencial $y'=f(Ax+By)$ mediante el cambio de variable dependiente $z=Ax+By$.

ii) Si $AE\neq BD$, demostrar que existen constantes x_0, y_0 tales que el cambio de variables $z=x-x_0$, $w=y-y_0$, reduce la ecuación $y'=f\Big(\dfrac{Ax+By+C}{Dx+Ey+F}\Big)$ a una ecuación homogénea.

iii) Estudiar la ecuación anterior si $AE=BD$.

Problema 1.1.11 Aplicar el problema anterior para resolver las siguientes ecuaciones:

$$i)\quad y'=(2x+2y+4)^2 \qquad ii)\quad y'=\cos(x-y+5)$$

$$iii)\quad y'=\frac{x+y+4}{x-y-6} \qquad iv)\quad y'=\frac{x+y+4}{x+y-6}$$

Problema 1.1.12 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

$$i)\quad xy'-3y=x^4 \qquad ii)\quad y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$iii)\quad (1+x^2)dy+(2xy-\operatorname{cotg} x)dx=0 \qquad iv)\quad y'+y=2xe^{-x}+x^2$$

$$v)\quad y'+y\operatorname{cotg} x=2x\operatorname{cosec} x \qquad vi)\quad (2y-x^3)dx=xdy$$

$$vii)\quad y-x+xy\operatorname{cotg} x+xy'=0 \qquad viii)\quad \frac{dx}{dy}-2xy=6ye^{y^2}$$

Indicación: $viii)$ esta ecuación es lineal si se considera x como variable dependiente, $x=x(y)$.

Problema 1.1.13 Resolver las siguientes ecuaciones de Bernoulli:

$$i)\quad xy'+y=x^4y^3 \qquad ii)\quad xy^2y'+y^3=x\cos x$$

$$iii)\quad xy'+y=xy^2 \qquad iv)\quad (3y+3xe^xy^{2/3})dx+xdy=0$$

Problema 1.1.14 Demostrar que ecuaciones del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y \log y$ se resuelven mediante la sustitución $z = \log y$. Aplicar el método anterior a la ecuación $xy' = 2x^2y + y \log y$.

Problema 1.1.15 Resolver las siguientes ecuaciones de Ricatti, utilizando las soluciones particulares indicadas:

i) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2, \quad y_1(x) = x;$

ii) $y' = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)y + 2y^2, \quad y_1(x) = ax + b;$

iii) $y' + y^2 = \dfrac{1}{x^4}, \quad y_1(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}.$

Problema 1.1.16

i) Resolver la ecuación diferencial $y' = \dfrac{2y}{x} + xy^2 - x^5$, buscando una solución particular de la forma $y_1(x) = kx^\alpha$.

ii) La misma cuestión para la ecuación $y' = \dfrac{3\cos^2 x + 4y^2 - 1}{4\cos x}$, con $y_1(x) = k \operatorname{sen} x$.

Problema 1.1.17 Sea la ecuación diferencial $x(1 - x^2)y' - x^2 + (x^2 - 1)y + y^2 = 0$.

i) Hallar todas las soluciones de la forma $y(x) = x^k$, con k entero.

ii) Hallar la solución general mediante el cambio $y = y_1 + u$, donde y_1 es cualquiera de la soluciones halladas en el apartado anterior. Identificar en la solución general las soluciones particulares calculadas.

iii) La misma cuestión para la ecuación $xy' - y = 2x\dfrac{y^2 - x^2}{x^4 - 1}$.

Problema 1.1.18 Resolver el problema $(t^2 + a)\dfrac{dx}{dt} + 2x^2 - 3tx - a = 0$, $x(0) = 1$, donde $a > 0$. Discutir la solución si el dato inicial es $x(0) = 0$.

1.2 Aplicaciones

Problema 1.2.1 Hallar las ecuaciones diferenciales que satisfacen las familias de curvas siguientes:

i) las parábolas de ecuación $y = cx + x^2$;

ii) las rectas de ecuación $y = cx + c^2$;

iii) las circunferencias del plano con centro en algún punto del eje X;

iv) las líneas rectas a distancia 1 del origen de coordenadas.

Problema 1.2.2 Calcular las trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes:

i)	$xy = c$	*ii)*	$x^2 + y^2 = cx$	*iii)*	$y = ce^{-x}$
iv)	$cx^2 + y^2 = 1$	*v)*	$y^2 = cx^3$	*vi)*	$\operatorname{senh} y = cx$
vii)	$y = 1/\log cx$	*viii)*	$x^2y^2 = c(x^2 - 1)$	*ix)*	$y = \dfrac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}$
x)	$y = \dfrac{x}{1 + cx}$	*xi)*	$x^{1/3} + y^{1/3} = c$	*xii)*	$r = c(1 + \cos\theta)$ (en coord. polares)

Problema 1.2.3 Demostrar que la familia de curvas $y^2 + 2cx = c^2$, llamadas parábolas homofocales, es ortogonal a sí misma.

Problema 1.2.4 Hallar las curvas tales que la pendiente en cada punto es n veces la pendiente del segmento que une ese punto con el punto $(1, 0)$.

Problema 1.2.5 Hallar las curvas tales que las distancias sobre la tangente desde el punto de tangencia a los puntos de corte con los ejes son iguales.

Problema 1.2.6 Determinar una curva contenida en el primer cuadrante con la propiedad de que dado cualquier punto (x, y) de la curva, ésta divide al rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, y)$, $(x, 0)$, (x, y), en dos partes cuyas áreas están en la proporción 1:2.

Problema 1.2.7 Hallar una curva plana con la siguiente propiedad: el punto medio del segmento de la normal comprendido entre el punto de la curva y el punto de corte de la normal con el eje X pertenece a la parábola $y^2 = 4x$.

Problema 1.2.8 Calcular la ecuación de las curvas que verifican la propiedad de que para cada tangente a la curva en un punto, el segmento comprendido entre ese punto y el eje Y tiene su punto medio en el eje X.

Problema 1.2.9 Hallar la forma de un espejo curvo tal que la luz de una fuente situada en el origen se refleje en él como un haz de rayos paralelos al eje de abscisas.

Problema 1.2.10 La ley de enfriamiento de Newton afirma que la rapidez con que un cuerpo varía su temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea. Un cuerpo con temperatura inicial de $80^o\,C$ se coloca en un medio cuya temperatura se mantiene a $50^o\,C$. Al cabo de 5 minutos el cuerpo se ha enfriado hasta $70^o\,C$.

i) Hallar la temperatura del cuerpo al cabo de 10 minutos.

ii) ¿Cuándo será su temperatura de $60^o\,C$?

Problema 1.2.11

i) Al sacar un pastel del horno su temperatura es de $150^o\,C$ y al cabo de 3 minutos ha descendido hasta $85^o\,C$. Calcular cuanto tiempo tardará en enfriarse a la temperatura ambiente de $20^o\,C$ con un error de medio grado.

ii) Se saca una botella de vino tinto de una bodega, que es un lugar frío a temperatura constante de 10^oC, y se deja reposar en una habitación a temperatura constante de 22^oC. Si sabemos que dejando la botella en esa habitación durante 12 horas su temperatura alcanzaría los 18^oC, cuál es el momento óptimo para beber el vino si queremos que su temperatura sea de 12^oC?

Problema 1.2.12 Una bola de nieve se derrite de tal manera que la razón de cambio de su volumen es proporcional al área de su superficie. El diámetro de la bola de nieve es inicialmente de 4 cm y al cabo de 30 minutos su diámetro pasa a ser de 3 cm.

i) ¿Cuándo será su diámetro de 2 cm?

ii) ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?

iii) Las mismas cuestiones si la disminución del volumen es proporcional al cuadrado del área.

Problema 1.2.13 El modelo logístico de crecimiento de una población viene regulado por la ecuación diferencial $P' = aP(1 - cP)$.

i) Determinar la población en un instante t sabiendo que la población inicial es M.

ii) Calcular la población de peces en un estanque el año 1998 sabiendo que se inició con 1.000 peces el año 1990 y se estimó que durante los años 1992 y 1994 era de 3.000 y 5.000 peces respectivamente.

iii) ¿Cuál es la población de equilibrio a largo plazo?

Problema 1.2.14 En la caída libre de un paracaidista (velocidades grandes) la resistencia del aire es proporcional (k_1) al cuadrado de la velocidad, mientras que cuando se abre el paracaídas (velocidades medianas) la resistencia del aire es proporcional (k_2) a la velocidad. Consideremos un paracaidista de 80 kg de masa que se arroja desde una altura de 4.000 m, siendo las constantes de resistencia del aire $k_1 =$0,31 y $k_2 =$78,4 respectivamente.

i) Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad final si no se abre el paracaídas.

ii) La misma cuestión si el paracaídas se abre a los 15 sg del lanzamiento.

Problema 1.2.15 De acuerdo con la ley de Torricelli, el agua escapará de un deposito abierto por un pequeño orificio a una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el del orificio. Un reloj de agua, o *clepsidra*, consiste en un cuenco hemisférico de radio R inicialmente lleno de agua al que se le practica un pequeño orificio circular de radio r en el fondo. ¿Cuánto tarda en vaciarse la clepsidra?

Problema 1.2.16 El radiocarbono ^{14}C de la madera viva se desintegra a un ritmo de $d_0 =$15,30 desintegraciones por minuto (dpm) por gramo de carbono. Tomando $\sigma =$5.600 años como semivida del ^{14}C, estimar la edad de cada uno de los siguientes objetos descubiertos por los arqueólogos y analizados por la radiactividad en 1950.

i) Un fragmento de pata de silla de la tumba de Tutankhamón, hallado en El Valle de los Reyes, Egipto, $d =$10,14 dpm.

ii) Un trozo de viga de una casa construida en Babilonia durante el reinado de Hammurabi, $d =$9,52 dpm.

iii) Una flecha encontrada en Leonard Rock Shelter, Nevada, EEUU, $d =$6,42 dpm.

Problema 1.2.17 Para dataciones de objetos más antiguos es preciso el uso de otros isótopos de semivida mayor. Si la semivida del potasio de argón es de 1,3 millones de años y se estima que en la actualidad hay un 12% de la cantidad de ese isótopo que había durante los primeros momentos de existencia de nuestro planeta, dar una cifra aproximada para la edad de la tierra.

1.3 Teoría cualitativa

Problema 1.3.1 Dibujar de forma aproximada las curvas integrales de

$$i)\quad y' = \frac{x}{y} \qquad ii)\quad y' = \frac{-x}{y} \qquad iii)\quad y' = \frac{y-4x}{4y+x}$$

$$iv)\quad y' = \frac{y}{y-x} \qquad v)\quad y' = \frac{\sqrt{x}}{y} \qquad vi)\quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$$

Problema 1.3.2 Buscar trayectorias explícitas en forma de potencias para las ecuaciones *i)*, *iv)*, *v)* y *vi)* anteriores y completar así su dibujo.

Problema 1.3.3 Estudiar la forma de las curvas integrales de las ecuaciones

$$i) \quad \frac{dx}{dt} = t - \frac{1}{x} \qquad\qquad ii) \quad \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{t}$$

Problema 1.3.4 Se considera la ecuación diferencial $y' = \dfrac{x+y-1}{1-x+3y}$. Sin resolverla, hallar los puntos donde las soluciones poseen máximos o mínimos locales.

Problema 1.3.5 Aplicar el método de aproximaciones sucesivas de Picard a los problemas siguientes, comparando con la solución exacta obtenida mediante integración directa. Tomar como primera iteración la función constante $x_0(t) = x(0)$.

$$i) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ x(0) = 1 \end{array} \right. \qquad\qquad ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$iii) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = 2t(1+x) \\ x(0) = 0 \end{array} \right. \qquad\qquad iv) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = t + x \\ x(0) = 1 \end{array} \right.$$

Problema 1.3.6 Resulta interesante observar cómo funciona el método de Picard cuando se eligen aproximaciones iniciales distintas. Aplicar el método al problema 1.3.5.*iv)* con $x_0(t) = \mathrm{e}^t$.

Problema 1.3.7 Sea la ecuación de primer orden $y' = 1 - \dfrac{1}{y^2}$.

i) Estudiar si por cada punto del plano pasa una única curva integral y dibujar aproximadamente las curvas integrales.

ii) Sea y^* la solución que satisface $y^*(0) = 2$. ¿Para qué valores de la variable independiente está definida y^*?

iii) Calcular aproximadamente $y^*(0.2)$.

Problema 1.3.8 Se considera la ecuación $y' = y^2 - \lambda y^3$, con $\lambda > 0$.

i) Determinar la existencia y unicidad de las soluciones así como su dibujo aproximado.

ii) Integrarla explícitamente.

iii) Estudiar la prolongabilidad de las soluciones.

iv) Comprobar la dependencia continua en el parámetro λ cuando éste tiende a cero.

Problema 1.3.9 Sea la ecuación $y' = 1 - \dfrac{\lambda}{x+y}$, con $\lambda > 0$.

i) Hacer un dibujo aproximado de las soluciones.

ii) Integrarla explícitamente.

iii) Sea $y_\lambda(x)$ la solución tal que $y_\lambda(0) = 1$. Estudiar el comportamiento de $y_\lambda(x)$ cuando $\lambda \to 0$.

iv) La misma pregunta para la solución que verifica $y_\lambda(0) = \lambda/2$.

Problema 1.3.10 Sea la ecuación $y' = a\dfrac{y}{x} + \dfrac{y^3}{x^3}$.

i) Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones.

ii) Resolver la ecuación para los diferentes valores del parámetro a.

iii) Estudiar la continuidad de la solución para $a \to 1$.

iv) Dibujar el campo de direcciones y hacer un dibujo aproximado de las soluciones en los casos $a = -1$, $a = 0$ y $a = 1$.

Problema 1.3.11 Se considera el problema $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Demostrar que si f es continua y decreciente en la segunda variable entonces existe una y sólo una solución. Indicación: si x_1 y x_2 son dos soluciones, derivar la función $g(t) = (x_1(t) - x_2(t))^2$.

Problema 1.3.12 Se considera el problema $\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ para $t \geq 0$. Comprobar que no tiene unicidad y calcular al menos dos soluciones.

Problema 1.3.13

i) Hallar la solución del problema $\begin{cases} y' = y^4 \\ y(0) = 1/3 \end{cases}$ y determinar el dominio de existencia.

ii) Estudiar si está definida en todo $I\!R$ la solución del problema $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{-y^2} + y^4 \\ y(0) = 1/3 \end{cases}$

Problema 1.3.14 Se considera la ecuación logística $y' = y(1 - Ay)$, donde el coeficiente A viene dado por $A(x) = 1 + \beta(\operatorname{sen} x + \cos x)$, con $|\beta| < 1$.

i) Encontrar la solución general de esta ecuación de Bernoulli.

ii) Probar que las soluciones que verifican $y(0) = \alpha$ con $0 < \alpha \leq 1$ están definidas para todo $x > 0$.

iii) Encontrar una solución particular y_p periódica y comprobar que para toda solución y de la ecuación se verifica $\lim\limits_{x\to\infty} |y(x) - y_p(x)| = 0$.

iv) Comprobar que si $\alpha > 1$, existe $\beta \in (-1, 1)$ tal que $\lim\limits_{x\to 3\pi/2} y(x) = \infty$.