PROBLEMAS DE EDO
2^{O} Ing. Industrial
CURSO 2009–2010

4 Sistemas autónomos.

4.1 Sistemas lineales. Planos de fases

Problema 4.1.1 Se considera el sistema lineal $\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \end{array}\right.$

i) Dibujar el plano de fases.

ii) Integrar la ecuación asociada.

iii) Determinar la estabilidad del origen y la de la solución que satisface $x(0) = y(0) = 1$.

Problema 4.1.2 Dibujar el plano de fases de los siguientes sistemas de ecuaciones. ¿Qué relación existe entre sus soluciones?

$$i)\ \left\{\begin{array}{l} x' = 2y \\ y' = 2x \end{array}\right. \qquad ii)\ \left\{\begin{array}{l} x' = -(x^2+y^2)y \\ y' = -(x^2+y^2)x \end{array}\right.$$

Problema 4.1.3 Estudiar los planos de fases de los sistemas lineales autónomos en dimensión 2 que tienen algún autovalor 0.

Problema 4.1.4 Se considera el sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = 1 - x + 3y \\ y' = x + y - 1 \end{array}\right.$

i) Dibujar el plano de fases.

ii) Resolverlo matricialmente.

iii) Convertirlo en una ecuación de segundo orden para $x(t)$ y resolverla.

iv) Escribirlo como una ecuación de primer orden para $y(x)$ y resolverla como ecuación exacta.

v) Resolver esta última ecuación como ecuación homogénea tras una traslación.

vi) Encontrar en los apartados *ii*) y *iii*) la solución que verifica $x(0) = 2$, $y(0) = 3$, y en *iv*) y *v*) la solución que verifica $y(2) = 3$. Identificarla en el plano de fases.

4.2 Sistemas no lineales

Problema 4.2.1 La ecuación logística de crecimiento de una población es $x' = x(1-x)$.

i) Utilizar la aproximación lineal para probar que $x = 0$ es inestable y que $x = 1$ es asintóticamente estable.

ii) Encontrar la solución general y calcular para qué valores iniciales $x(0) = x_0$ se tiene $x(t)$ definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

iii) Dibujar las soluciones según los casos $x_0 > 1$, $0 < x_0 < 1$ y $x_0 < 0$.

Problema 4.2.2 Dibujar el plano de fases de los siguientes sistemas

$$i)\ \left\{\begin{array}{l} x' = y - 2xy \\ y' = -2x + y^2 \end{array}\right. \qquad ii)\ \left\{\begin{array}{l} x' = 2y + 2xy \\ y' = 2x - x^2 - y^2 \end{array}\right.$$

utilizando algún tipo de simetría para comprobar si los centros que aparecen en la aproximación lineal se mantienen para el sistema no lineal.

Problema 4.2.3 Se considera la ecuación diferencial $x'' - 2x + 2x^3 = 0$.

i) Escribir un sistema diferencial equivalente y estudiar la naturaleza de los puntos críticos en la aproximación lineal correspondiente.

ii) Dibujar el plano de fases indicando la naturaleza de los puntos críticos.

iii) Calcular las trayectorias del sistema.

iv) Calcular la familia de trayectorias ortogonales.

Problema 4.2.4 Se considera la ecuación diferencial $x'' + 2x - 2x^3 = 0$.

i) Escribir un sistema diferencial equivalente y estudiar la naturaleza de los puntos críticos en la aproximación lineal correspondiente.

ii) Dibujar el plano de fases indicando la naturaleza de los puntos críticos.

iii) Calcular las trayectorias del sistema.

iv) Calcular los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la solución de la ecuación que satisface $x(0) = 0$, $x'(0) = a$ es periódica, es decir, la trayectoria en el plano de fases correspondiente es cerrada.

Problema 4.2.5 Se considera la ecuación $x'' + (x')^2 + x^2 = 4$.

i) Escribir un sistema diferencial equivalente y estudiar la naturaleza de los puntos críticos.

ii) Dibujar el plano de fases.

iii) Describir la evolución para $t \in \mathbb{R}$ de la función $x(t)$ que verifica $x(0) = x'(0) = 0$.

Problema 4.2.6 Se considera la ecuación

$$2x'' - (x')^2 + x(x-2) = 0$$

i) Escribir un sistema diferencial equivalente y estudiar la naturaleza de los puntos críticos.

ii) Integrar la ecuación de las trayectorias. ¿Hay trayectorias rectas?

iii) Deducir el comportamiento asintótico de las soluciones cuando $x \to \pm\infty$.

iv) Dibujar el plano de fases del sistema anterior.

Problema 4.2.7 Se considera el sistema autónomo $\left\{\begin{array}{l} x' = x(5 - x - y) \\ y' = y(x-2). \end{array}\right.$

i) Clasificar sus puntos críticos.

ii) Dibujar el plano de fases.

iii) Sea $(x(t), y(t))$ la trayectoria solución del sistema anterior que verifica $x(0) = a$, $y(0) = b$, con a, $b \geq 0$. Calcular $\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t))$.

Problema 4.2.8 Sea el sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = 3y^2 - 3 \\ y' = 6x + 4x^3 \end{array}\right.$

i) Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar el plano de fases.

ii) Determinar para qué valor de a es periódica la solución que pasa por $x(0) = 0$, $y(0) = a$.

Problema 4.2.9 Sea la ecuación $x'' = 1 - x^2 - kx'$, $k \geq 0$.

i) Determinar y clasificar sus puntos singulares en función de k.

ii) Dibujar aproximadamente el plano de fases para $k = 0, 1$ y 3.

iii) Si la ecuación anterior se interpreta como la descripción del movimiento de una partícula sobre una recta sometido a una fuerza $g(x) = 1 - x^2$ con rozamiento proporcional a su velocidad, explicar alguna de las órbitas para diferentes valores de k.

Problema 4.2.10 El sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = x(3 - x - ay) \\ y' = y(3 - y - ax) \end{array}\right.$ donde $a > 0$ es un parámetro, puede describir la evolución de dos especies animales en competición.

i) Clasificar los puntos críticos elementales en función de a.

ii) Dibujar el plano de fases para $a = 1/2$, $a = 1$ y $a = 2$ e interpretarlos comparando los resultados.

Problema 4.2.11 Dado $\alpha \geq 0$, el sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = x(2 - x - y) - \alpha x \\ y' = y(3 - 2x - y) \end{array}\right.$ modela la evolución de la población de truchas (x) y salmones (y) en un cierto río de corto recorrido, donde el término $-\alpha x$ representa la intervención de un pescador de truchas. Indicar cómo influiría la actividad del pescador en la evolución de ambas poblaciones en función de su habilidad, es decir, en función de α.

Problema 4.2.12 Dibujar el plano de fases de los sistemas

$$i)\ \left\{\begin{array}{l} x' = x(x - 2) \\ y' = (x - 2y)(x - 1) \end{array}\right. \qquad ii)\ \left\{\begin{array}{l} x' = x + 2xy \\ y' = y^2 - 1 \end{array}\right.$$

Problema 4.2.13 Sea el sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = 2xy \\ y' = y^2 - x^2 - 4 \end{array}\right.$

i) Analizar los puntos críticos.

ii) Resolver la ecuación de las órbitas y dibujar el plano de fases del sistema.

iii) Identificar la órbita asociada a la solución del sistema con $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

iv) Describir la función $x(t)$ de la solución anterior.

Problema 4.2.14 Sea el sistema $\left\{\begin{array}{l} x' = -y + x^2 + y^2 \\ y' = x - 2xy \end{array}\right.$

i) Analizar los puntos críticos.

ii) Dibujar aproximadamente el plano de fases del sistema.

iii) Describir el comportamiento de la trayectoria que pasa por el punto $(0, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Problema 4.2.15 Se considera la ecuación diferencial $x'' + \mu(x^2+1) + 2x = 0\,,\ \mu \geq 0$ y el sistema resultante al definir $y = x'$.

i) Determinar los posibles puntos críticos que aparecen en función del valor del parámetro μ y clasificarlos atendiendo a la aproximación lineal.

ii) En lo que sigue fijamos el valor $\mu = 3/5$. Dibujar el plano de fases.

iii) Integrar la ecuación (exacta) de las trayectorias.

iv) Encontrar una condición inicial, $x(0) = \alpha$, $x'(0) = \beta$, que produzca como solución una trayectoria en el plano de fases que une un punto crítico consigo mismo a través de un bucle (órbita homoclínica).

v) Dibujar la solución $x(t)$, $t \in I\!R$ correspondiente a la trayectoria del apartado anterior.

Problema 4.2.16 Dibujar el plano de fases de los siguientes sistemas de ecuaciones tras escribirlos en coordenadas polares:

$$i)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x \end{array}\right. \qquad\qquad ii)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = -y + \mu x \\ y' = x + \mu y \end{array}\right.$$

$$iii)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = -y + \mu x(x^2+y^2) \\ y' = x + \mu y(x^2+y^2) \end{array}\right. \qquad\qquad iv)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = -y - x(x^2+y^2-1) \\ y' = x - y(x^2+y^2-1) \end{array}\right.$$

Problema 4.2.17 Calcular el valor de a para el que el plano de fases de asociado a la ecuación $x'' = x^2 - 4x + a$ cambia radicalmente, dibujando el plano de fases en cada caso.

Problema 4.2.18 Clasificar, según los valores de $a \geq 0$, los puntos críticos de la ecuación del péndulo rotatorio $x'' = \operatorname{sen} x(-1 + a\cos x)$. Dibujar el plano de fases para $a = 0$ (péndulo simple) y para $a = 2$, e interpretar el significado de las órbitas.

Problema 4.2.19 Se considera la ecuación de Kepler que describe el movimiento de un planeta $r'' = -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{2C}{r^3}$, donde $r > 0$ es la distancia del planeta al centro de masas del sistema.

i) Clasificar el único punto crítico para la aproximación lineal.

ii) Demostrar por simetría que el carácter de ese punto se mantiene para el sistema no lineal.

iii) Obtener la misma conclusión utilizando una integral primera.

iv) Las curvas de nivel de la integral primera corresponden a los valores de la energía, $H(r, r') = E$. Describir las trayectorias en términos de los distintos valores de E e interpretar el movimiento del planeta.