PROBLEMAS DE EDO
2^{o} Ing. Industrial
CURSO 2009–2010

2 Ecuaciones y sistemas lineales.

2.1 Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes

Problema 2.1.1 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$i)\quad y''+3y'-10y=6\mathrm{e}^{4x} \qquad ii)\quad y''-2y'+5y=25x^2+12$$
$$iii)\quad y''-y'-6y=20\mathrm{e}^{-2x} \qquad iv)\quad y''-3y'+2y=3\,\mathrm{sen}\,2x$$

Problema 2.1.2 Hallar las soluciones de los problemas de valores iniciales siguientes:

$$i)\ \left\{\begin{array}{l} x''+2x'+2x=t\mathrm{e}^{-t} \\ x(0)=x'(0)=0 \end{array}\right. \qquad ii)\ \left\{\begin{array}{l} x'''-2x''+10x'=0 \\ x(0)=0, x'(0)=1,\ x''(0)=-8 \end{array}\right.$$

$$iii)\ \left\{\begin{array}{l} x'''+2x''+5x'=5t \\ x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=1/5 \end{array}\right. \qquad iv)\ \left\{\begin{array}{l} t^3x'''+t^2x''-2tx'+2x=2t^4 \\ x(1)=x'(1)=x''(1)=0 \end{array}\right.$$

Problema 2.1.3 Determinar, en función del parámetro real μ, una base del espacio de soluciones de la ecuación $x'''+(\mu+1)x''+(\mu+1)x'+x=0$.

Problema 2.1.4 Para determinar la resistencia de una pequeña esfera que se mueve con velocidad constante en un fluido viscoso se plantea la ecuación $t^3x''''+8t^2x'''+8tx''-8x'=0$. Hallar su solución general.

Problema 2.1.5 Resolver el problema $\left\{\begin{array}{l} y'''-4y'=x+3\cos x+\mathrm{e}^{-2x} \\ y(0)=2,\ y'(0)=\dfrac{-23}{40},\ y''(0)=\dfrac{29}{4} \end{array}\right.$

Problema 2.1.6 Resolver el problema $\left\{\begin{array}{l} u''+u'=\left\{\begin{array}{ll} t+1 & 0\le t<1 \\ 3-t & t\ge 1 \end{array}\right. \\ u(0)=-1,\ u'(0)=0 \end{array}\right.$

Problema 2.1.7 La ecuación diferencial que regula un circuito LRC viene dada por

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+C^{-1}I=\frac{dE}{dt},$$

donde E designa la fuerza electromotriz del circuito y $L=10$ h, $R=20\,\Omega$, $C=0.01$ f. Si la corriente inicial y la carga inicial del condensador son nulas, determinar la intensidad de corriente del circuito para $i)$ corriente continua, $E(t)=10$; $ii)$ corriente alterna, $E(t)=10\,\mathrm{sen}\,2t$.

Problema 2.1.8 La corriente en un circuito LRC sin resistencia está regida por el problema de valores iniciales $\left\{\begin{array}{l} I''+4I=E'(t) \\ I(0)=I'(0)=0 \end{array}\right.$ donde la fuerza electromotriz viene dada por la función $E(t)=\left\{\begin{array}{ll} 4t & 0<t<3\pi/2 \\ 4(3\pi-t) & 3\pi/2<t<3\pi \\ 0 & t>3\pi \end{array}\right.$, es decir, se enciende el generador con voltaje creciente y pasado un tiempo se hace decrecer el voltaje hasta cero.

i) Determinar la corriente en cada instante de tiempo.

ii) Dibujar su gráfica.

iii) Comprobar que el resultado final depende crucialmente del tiempo transcurrido para cambiar el voltaje, considerando por ejemplo $E(t) = \begin{cases} 4t & 0 < t < \pi \\ 4(2\pi - t) & \pi < t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$

Problema 2.1.9 Se considera el problema masa-resorte al que se le aplica una fuerza externa periódica $\begin{cases} 2u'' = -8u + \cos \omega t \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$

i) Resolver el problema si $|\omega| \neq 2$.

ii) Calcular el límite de la solución obtenida cuando $\omega \to 2$.

iii) Resolver el problema si $\omega = 2$.

2.2 Sistemas lineales

Problema 2.2.1 Resolver los siguientes problemas de valores iniciales resolviendo primero una ecuación de segundo orden para x (o para y)

$$i) \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - y \\ x(0) = 1,\, y(0) = 2 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = 5x - y + 1 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \qquad iii) \begin{cases} x' = x \\ y' = x + 2y \\ z' = x - z \end{cases}$$

Problema 2.2.2 Hallar la solución general del siguiente sistema calculando los autovalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

Problema 2.2.3 Se considera el sistema de ecuaciones $\vec{X}' = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix} \vec{X}$ con $a, b \in I\!R$, $a > b$.

i) Sabiendo que la solución general del sistema es del tipo $\vec{X}(t) = c_1 \vec{u}_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \vec{u}_2 \mathrm{e}^{4t}$, se pide hallar a y b.

ii) Encontrar la solución del sistema que verifica $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Problema 2.2.4 En un modelo de mercado con expectativas de precios, la oferta y la demanda en cada instante de tiempo vienen dadas por las fórmulas

$$\begin{cases} \mathcal{O}(t) = 1/3 + 6P(t) + 2P'(t) \\ \mathcal{D}(t) = 2/3 - 4P(t) + P'(t) \end{cases}$$

Se considera que el stock $S(t)$ varía exactamente con el exceso de oferta, $S'(t) = \mathcal{O}(t) - \mathcal{D}(t)$, que el precio se ajusta a un precio ideal objetivo $\overline{P}(t)$ de manera que $P'(t) = \overline{P}(t) - P(t)$, y que éste viene relacionado con el stock por la fórmula $\overline{P}(t) = 2 + 5t^2 - S(t)$. Calcular el precio en cada instante si el precio y stock iniciales son respectivamente $2/3$ y $3/2$.

Problema 2.2.5 Sobre una superficie horizontal lisa se sujeta una masa de 2 kg a una superficie vertical por medio de un resorte de constante elástica 4 Nw/m. Otra masa de 1 kg se conecta a la primera mediante un resorte con constante elástica 2 Nw/m. Las masas se alinean horizontalmente de manera que los resortes queden con sus longitudes naturales. Se efectúa un desplazamiento de 0.5 m a la derecha de sus posiciones de equilibrio y se suelta. Determinar las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema y resolver el correspondiente problema de valor inicial.

2.3 Ecuaciones lineales con coeficientes variables

Problema 2.3.1 Hallar, mediante reducción de orden, las soluciones de los problemas

i) $(x^2+2y')y''+2xy'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0;$

ii) $yy''=y^2y'+(y')^2, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2;$

iii) $y''=y'\mathrm{e}^y, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=2.$

Problema 2.3.2 Resolver el problema de contorno $\left\{\begin{array}{l} u''+\dfrac{1}{r}u'=0 \\ u(1/2)=0,\ u(1)=3 \end{array}\right.$ que aparece en el estudio de la distribución radial de temperatura en el anillo $\{1/2\le r\le 1\}$, con temperatura fija en los bordes.

Problema 2.3.3

i) Hallar los valores de $a\in I\!R$ para los que el problema de contorno $\left\{\begin{array}{l} u''+au=0 \\ u(0)=0,\ u(1)=0 \end{array}\right.$ tenga solución no trivial y calcular las soluciones correspondientes a cada valor de a.

ii) La misma cuestión para el problema de contorno $\left\{\begin{array}{l} u''-2u'+au=0 \\ u(0)=0,\ u(\pi)=0 \end{array}\right.$

Problema 2.3.4 Se considera la ecuación $xy''+ay'=1$, $a\in I\!R$, $x\ge 1$.

i) Calcular la solución particular $y_a(x)$ que verifica $y_a(1)=0$, $y_a'(1)=0$.

ii) ¿Es y_a función continua de a?

Problema 2.3.5 Supongamos que y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de segundo orden homogénea $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$. Sea $W(x)$ el wronskiano correspondiente a estas soluciones.

i) Demostrar la fórmula de Abel-Liouville $P=\dfrac{-W'}{W}$.

ii) Si y_1 es conocida, encontrar y_2 solución independiente de y_1 usando la fórmula anterior y la relación $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'=\dfrac{W}{y_1^2}$.

iii) Aplicar el apartado anterior a las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} 1) & x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0, \quad y_1(x)=x; \\ 2) & y''+\dfrac{2}{t}y'+y=0, \quad y_1(t)=\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}. \end{array}$$

Problema 2.3.6 Sea la ecuación de Legendre de orden 1 dada por $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, $x>1$. Hallar la solución general partiendo de $y_1(x)=x$.

Problema 2.3.7 Sea la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$ dada por $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$, $x>0$. Hallar la solución general partiendo de $y_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen} x$.

Problema 2.3.8 Sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de segundo orden homogénea $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

i) Demostrar que y_1 e y_2 no se pueden anular en el mismo punto.

ii) La misma cuestión para y_1' e y_2'.

iii) Demostrar que entre cada dos ceros consecutivos de y_1 existe uno y sólo un cero de y_2.

Problema 2.3.9 La ecuación lineal de segundo orden $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ es exacta si se puede escribir en la forma $(Py')'+(fy)'=0$, que se puede resolver fácilmente.

i) Encontrar la relación entre P, Q y R para que la anterior ecuación sea exacta.

ii) Resolver la ecuación $x^2y''+x(4-x)y'+2(1-x)y=0$.

Problema 2.3.10 Sea el operador diferencial de segundo orden $L(x)=x''+P(t)x'+Q(t)x$

i) Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $L(x)=0$ y $W(x)$ es el correspondiente wronskiano, demostrar que la función $x_p(t)=u(t)x_1(t)+v(t)x_2(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $L(x)=R(t)$ tomando

$$u=-\int\frac{Rx_2}{W},\qquad v=\int\frac{Rx_1}{W}.$$

ii) Demostrar que esta solución puede escribirse en la forma $x_p(t)=\int_{t_0}^{t}G(t,s)R(s)\,ds$, hallando G en términos de x_1 y x_2.

iii) Hallar G para los operadores

$$1)\quad L(x)=x''+x \qquad 2)\quad L(x)=x''+2x'+2x$$

iv) Resolver los problemas de valores iniciales

$$1)\ \begin{cases} tx''-(t+1)x'+x=t^2\mathrm{e}^t \\ x(1)=x'(1)=0 \\ x_1(t)=t+1 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} t^2x''-2tx'+2x=\log t \\ x(1)=x'(1)=1 \\ x_1(t)=t \end{cases}$$