1 Ecuaciones de primer orden.

1.1 Métodos elementales de integración

Problema 1.1.1 Separando variables: *i)* $(y-1)e^y = cx$. *ii)* $y = 1 + cxe^x$. *iii)* $y = c\cos x$. *iv)* $y = \dfrac{1}{2}\log(c + \dfrac{2}{3}e^{3x})$. *v)* $(y-1)^2 e^y = c(x-3)^5 e^x$. *vi)* $ye^{y^2/4} = cx^2 e^{x^2/4}$.

Problema 1.1.2 Mediante el cambio $z = y/x$: *i)* $y = \dfrac{x^3}{c - x^2}$. *ii)* $y = cx^2 - \dfrac{1}{4c}$. *iii)* $y = x\,\mathrm{tg}(cx^3)$. *iv)* $ye^{-2\sqrt{x/y}} = c$. *v)* $y = x\log(\log(cx^2))$. *vi)* $y^2 = 2x^2\log(cx)$.

Problema 1.1.3 Son ecuaciones exactas. *i)* $x^4 - 4xy - 2e^{2y} = c$. *ii)* $6x^2 + y^2 + 5xy - 9x - 3y = c$. *iii)* $y^4 + 4xy = c$. *iv)* $e^x \operatorname{sen} y + x\,\mathrm{tg}\, y = c$. *v)* $x^2y^2(x^2 - 4y^2) = c$. *vi)* $x^2y^3 + y\operatorname{sen} x = c$.

Problema 1.1.4 *i)* $y = \log(1 + e^x)$. *ii)* $y = 2(x-1)^2 e^x$. *iii)* Se tienen dos posibles ecuaciones: $y' = \pm 3y^2$; la solución buscada es $y = \dfrac{1}{1+3x}$, pues $y = \dfrac{1}{3(1-x)}$ no es continua en $[1/3, \infty)$. *iv)* $x^2 + y^2 = 25$.

Problema 1.1.5 *i)* $f(y) = \alpha - y^2$, $\alpha \in I\!R$; $\dfrac{y^3}{3} + xy^2 - \alpha x = c$. *ii)* $\mu(y) = \dfrac{1}{f(y)} e^{-\int^y \frac{2s}{f(s)}ds}$. *iii)* $\mu(y) = \dfrac{1}{y}e^{-2y}$; $e^{-2y}(4x + 2y + 1) = c$.

Problema 1.1.6 *i)* $\mu(x) = x^2$, $x^4 + x^3y^3 = c$. *ii)* $\mu(y) = 1/y^2$, $3y^3 + 2x^2y + x = cy$. *iii)* $\mu(y) = 1/\operatorname{sen} y$, $x^2 = c\operatorname{sen} y$. *iv)* $\mu(y) = e^y$, $(x^2 + xy)e^y = c$.

Problema 1.1.7 $\dfrac{Q_x - P_t}{P - Q} = h(t + x)$; $\mu(s) = e^{\int^s h}$; en el ejemplo $\mu(s) = (s+1)^{-4}$; la solución es $(x + t + 1)^3 = cxt$.

Problema 1.1.8 $\mu = x^2y$; $x^3y^2(x^4 - y^7) = c$.

Problema 1.1.9 $\mu(s) = s^{-3}$; $x - y^2 = c(x + y^2)^2$.

Problema 1.1.10 *i)* $z = Ax + By$ la convierte en variables separadas; la solución es $\displaystyle\int^{Ax+By} \frac{dz}{A + Bf(z)} = x + c$.

ii) Si (x_0, y_0) es la solución del sistema $\left\{\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{array}\right.$, el cambio $z = x - x_0$, $w = y - y_0$ convierte la ecuación en una homogénea; $\displaystyle\int^{\frac{y-y_0}{x-x_0}} \frac{ds}{f(\frac{A+Bs}{D+Es}) - s} = \log|x - x_0| + c$.

iii) $z = Ax + By$ la convierte en variables separadas; $\displaystyle\int^{Ax+By} \frac{dz}{A + Bf(\frac{Bz+BC}{Ez+BF})} = x + c$.

Problema 1.1.11 *i)* $2x+2y+4=\operatorname{tg}(2x+c)$. *ii)* $\operatorname{cosec}(x-y+5)+\operatorname{cotg}(x-y+5)=c-x$. *iii)* $\log[(x-1)^2+(y+5)^2]=2\operatorname{arctg}(\frac{y+5}{x-1})+c$. *iv)* $5\log|x+y-1|+x-y=c$.

Problema 1.1.12 *i)* $y=x^3(x+c)$. *ii)* $y=\mathrm{e}^{-x}(\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x+c)$. *iii)* $y=\dfrac{\log|\operatorname{sen}x|+c}{x^2+1}$. *iv)* $y=\mathrm{e}^{-x}(x^2+c)+x^2-2x+2$. *v)* $y=(x^2+c)\operatorname{cosec}x$. *vi)* $y=x^2(c-x)$. *vii)* $y=\dfrac{\operatorname{sen}x-x\cos x+c}{x\operatorname{sen}x}$. *viii)* $x=\mathrm{e}^{y^2}(3y^2+c)$.

Problema 1.1.13 *i)* $x^2y^2(c-x^2)=1$. *ii)* $x^3y^3=(3x^3-18x)\operatorname{sen}x+(9x^2-18)\cos x+c$. *iii)* $xy(c-\log|x|)=1$. *iv)* $xy^{1/3}=\mathrm{e}^x(1-x)+c$.

Problema 1.1.14 $z=\log y$ implica $z'=Qz-P$, y la solución es
$y=\exp[\mathrm{e}^{\int^x Q}(c-\int^x P\mathrm{e}^{-\int Q})]$; en el ejemplo $y=\mathrm{e}^{2x^2+cx}$.

Problema 1.1.15 *i)* $y=x+\dfrac{1}{c-x}$. *ii)* $y=2x+2+\dfrac{1}{c\mathrm{e}^{2x}+1}$. *iii)* $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^2(c\mathrm{e}^{-2/x}-1)}$.

Problema 1.1.16 *i)* $y_1=\pm x^2$; $y=x^2+\dfrac{2x^2}{c\mathrm{e}^{-x^4/2}-1}$. *ii)* $y_1=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x$; $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x+\dfrac{1}{c\cos x-\operatorname{sen}x}$.

Problema 1.1.17 *i)* $k=0,1,2$, es decir, $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$. *ii)* $y=1+\dfrac{x^2-1}{cx+1}$; $y_1\to c=\infty$, $y_2\to c=1$, $y_3\to c=0$. *iii)* $y_1=x$, $y_2=x^3$, $y_3=\dfrac{1}{x}$; $y=x+\dfrac{x(x^2-1)}{cx^2+c+1}$; $y_1\to c=\infty$, $y_2\to c=0$, $y_3\to c=-1$.

Problema 1.1.18 $x(t)=t+\dfrac{a}{2t+\sqrt{at^2+a^2}}$; si $x(0)=0$ la solución es $x(t)=t$.

1.2 Aplicaciones

Problema 1.2.1 *i)* $xy'=y+x^2$. *ii)* $xy'+(y')^2=y$. *iii)* $(x-c_1)^2+y^2=c_2^2\ \Rightarrow\ yy''+(y')^2+1=0$. *iv)* $cx+\sqrt{1-c^2}\,y=1\ \Rightarrow\ \pm xy'+y=\sqrt{1+(y')^2}$.

Problema 1.2.2 La ecuación diferencial para la familia ortogonal y su solución son:
i) $y'=\dfrac{x}{y}\ \Rightarrow\ x^2-y^2=k$. *ii)* $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\ \Rightarrow\ x^2+y^2=ky$. *iii)* $y'=\dfrac{1}{y}\ \Rightarrow\ y^2=2x+k$. *iv)* $y'=\dfrac{xy}{1-y^2}\ \Rightarrow\ x^2+y^2-2\log y=k$. *v)* $y'=-\dfrac{2x}{3y}\ \Rightarrow\ 2x^2+3y^2=k$. *vi)* $y'=-\dfrac{x}{\operatorname{tgh}y}\ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{x^2/2}\cosh y=k$. *vii)* $y'=\dfrac{x}{y^2}\ \Rightarrow\ 3x^2-2y^3=k$. *viii)* $y'=\dfrac{x(1-x^2)}{y}\ \Rightarrow\ x^4-2x^2+2y^2=k$. *ix)* $y'=\dfrac{1}{1-y^2}\ \Rightarrow\ y^3+3x-3y=k$. *x)* $y'=-\dfrac{x^2}{y^2}\ \Rightarrow\ x^3+y^3=k$. *xi)* $y'=\dfrac{x^{2/3}}{y^{2/3}}\ \Rightarrow\ x^{5/3}-y^{5/3}=k$. *xii)* $\dfrac{r'}{r}=\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\ \Rightarrow\ r=k(1-\cos\theta)$.

Problema 1.2.3 La ecuación que verifica la familia es $(y')^2 + \frac{2x}{y}y' - 1 = 0$. Las dos soluciones $y' = f_1$, $y' = f_2$ de esta ecuación cuadrática verifican $f_1 f_2 = -1$ (el término independiente).

Problema 1.2.4 $y' = \dfrac{ny}{x-1} \;\Rightarrow\; y = c(x-1)^n$.

Problema 1.2.5 $y' = \pm\dfrac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = cx$ ó $y = \dfrac{c}{x}$.

Problema 1.2.6 Si suponemos, por ejemplo, que el área bajo la curva es el doble que el área sobre la curva, $\displaystyle\int_0^x y(s)ds = \frac{2}{3}xy \;\Rightarrow\; y' = \frac{y}{2x} \;\Rightarrow\; y = c\sqrt{x}$.

Problema 1.2.7 $y' = \dfrac{y}{8} - \dfrac{2x}{y} \;\Rightarrow\; y^2 = c\,\mathrm{e}^{x/4} + 16x + 64$.

Problema 1.2.8 $y' = \dfrac{2y}{x} \;\Rightarrow\; y = cx^2$.

Problema 1.2.9 $y' = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y} \;\Rightarrow\; y^2 + 2cx = c^2$, familia de parábolas homofocales (foco en el origen).

Problema 1.2.10 *i)* $T(t) = 50 + 30(2/3)^{t/5}$; $T(10) = \dfrac{190}{3} \approx 63{,}3^o\,C$. *ii)* Al cabo de $t = \dfrac{5\log 3}{\log 3 - \log 2} \approx 13{,}5$ min.

Problema 1.2.11 *i)* $T(t) = 20 + 130 \cdot 2^{-t/3}$; $T(t) = 20{,}5 \Rightarrow t = \dfrac{3\log 260}{\log 2} \approx 24{,}06$ min. *ii)* $T(t) = 22 - 12 \cdot 3^{-t/12}$; $T(t) = 12 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{12\log(6/5)}{\log 3}$ ($\approx$ 2 horas, justo para sacar el vino al ir a preparar la comida).

Problema 1.2.12 *i)* $(\frac{1}{6}\pi D^3)' = -\alpha\pi D^2$; $D(t) = 4 - 2t$; $D(t_1) = 2 \;\Rightarrow\; t_1 = 1$ h.
ii) $D(t_2) = 0 \;\Rightarrow\; t_2 = 2$ h. *iii)* $(\frac{1}{6}\pi D^3)' = -\alpha(\pi D^2)^2$; $D(t) = \dfrac{12}{2t+3}$; $t_1 = 1,5$ h; $t_2 = \infty$, es decir, nunca.

Problema 1.2.13 *i)* $P(t) = \dfrac{M}{cM + (1-cM)\mathrm{e}^{-at}}$. *ii)* Si 1990 corresponde a $t = 0$, $P(t) = \dfrac{6000}{1 + 5^{1-t/2}}$; $P(8) = \dfrac{6000 \cdot 125}{126} \approx 5952$ peces. *iii)* $\displaystyle\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{c} = 6000$ peces.

Problema 1.2.14 *i)* Si no se abre el paracaídas, el problema para la velocidad es

$$\begin{cases} v' = g - \dfrac{k_1}{m}v^2 \\ v(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad v(t) = \sqrt{mg/k_1}\ \mathrm{tgh}(\sqrt{gk_1/m}\,t).$$

La distancia recorrida es

$$\begin{cases} y' = v \\ y(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad y(t) = (m/k_1)\log(\cosh(\sqrt{gk_1/m}\,t)).$$

Igualando $y(t_1) = 4000$ se obtiene $t_1 = 83$ seg; la velocidad al tocar el suelo es $v(t_1) = 50{,}29$ m/seg (≈ 181 km/h), prácticamente la velocidad terminal $v_\infty = \sqrt{mg/k_1}$ (de hecho la velocidad terminal se alcanza al cabo de sólo 15 seg, pues $\operatorname{tgh}(3) \approx 1$).
ii) Si al cabo de 15 seg se abre el paracaídas, el nuevo problema para la velocidad es

$$\left\{\begin{array}{l} w' = g - \dfrac{k_2}{m} w \\ w(0) = v(15) = V \end{array}\right. \longrightarrow \quad w(t) = mg/k_2 - (mg/k_2 - V)\mathrm{e}^{-k_2 t/m}.$$

Para la distancia recorrida, tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} z' = w \\ z(0) = y(15) = Y \end{array}\right. \longrightarrow \quad z(t) = Y + (mg/k_2)t + (mV/k_2 - m^2 g/k_2^2)(1 - \mathrm{e}^{-k_2 t/m}).$$

Igualando $z(t_2) = 4000$ se obtiene $t_2 = 339$ seg; la velocidad al tocar tierra ahora es $w(t_2) = 10{,}04$ m/seg (≈ 36 km/h), de nuevo prácticamente la velocidad límite $w_\infty = mg/k_2$. Hay que resaltar que la ecuación $z(t_2) = 4000$ no se puede resolver explícitamente, y habrá que utilizar algún método numérico de aproximar la solución.

Problema 1.2.15

$$\left(\int_0^{y(t)} \pi(R^2 - (R-\rho)^2)d\rho\right)' = -\pi r^2 \sqrt{2gy(t)} \quad \longrightarrow \quad \frac{4}{3}Ry^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = c - tr^2\sqrt{2g}.$$

$$y(0) = R \;\Rightarrow\; c = \frac{14}{15}R^{5/2}; \qquad y(T) = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{14R^{5/2}}{15r^2\sqrt{2g}} \text{ seg.}$$

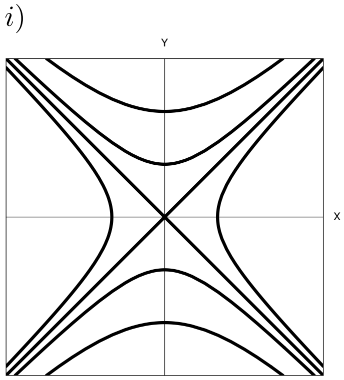
Problema 1.2.16 *i)* $T = 55 + \dfrac{\sigma \log(d_0/d)}{\log 2}$; $T_1 = 3378$ años. *ii)* $T_2 = 3888$ años. *iii)* $T_3 = 7071$ años.

Problema 1.2.17 $T = \dfrac{\sigma \log(d_0/d)}{\log 2} = \dfrac{1{,}3 \log(25/3)}{\log 2} \approx 3{,}9$ millones de años.

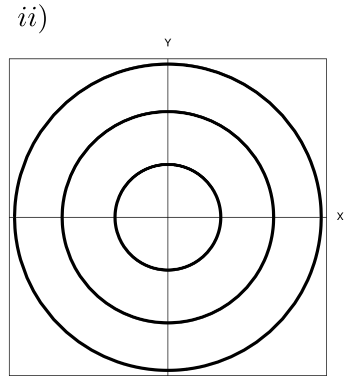
1.3 Teoría cualitativa

Problema 1.3.1

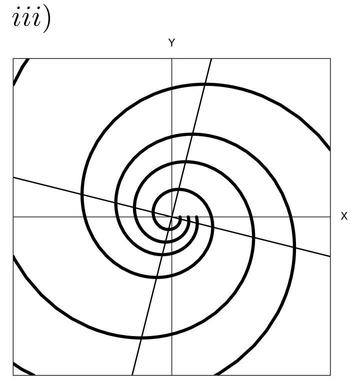
i)



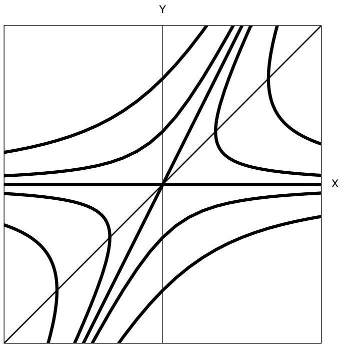
ii)



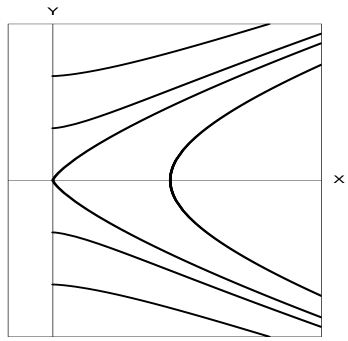
iii)



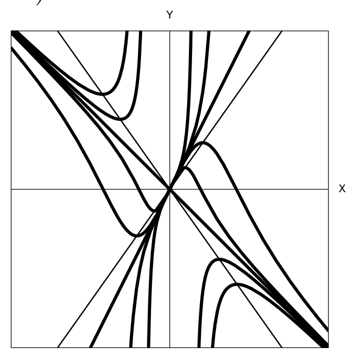
iv)



v)



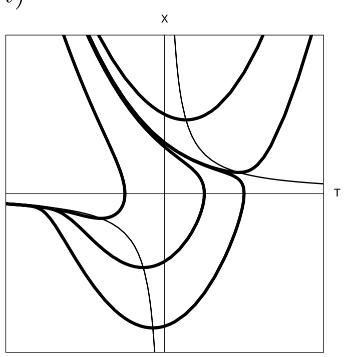
vi)



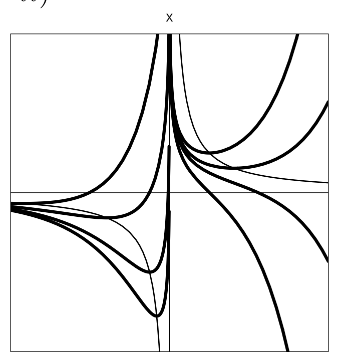
Problema 1.3.2 *i)* $y = \pm x$. *iv)* $y = 2x$. *v)* $y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/4}$. *vi)* $y = 2x$, $y = -x$.

Problema 1.3.3

i)



ii)



Problema 1.3.4 $y' = 0 \Rightarrow x + y = 1$. En esos puntos, $y'' = \dfrac{1}{4(1-x)}$. Los máximos son los puntos de la recta $y = 1 - x$ con $x > 1$ y los mínimos aquéllos con $x < 1$.

Problema 1.3.5

i) $x_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \mathrm{e}^t$.

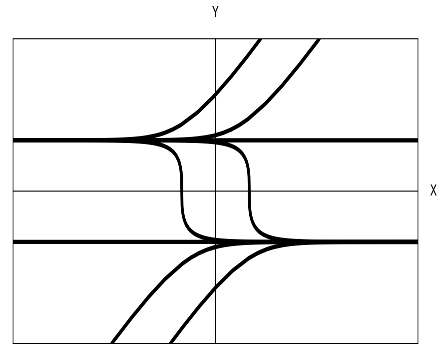
ii) $x_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k + o(t^n)$, $t \in (0,1)$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{1}{1-t}$.

iii) $x_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{2k}}{k!}$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \mathrm{e}^{t^2} - 1$.

iv) $x_n(t) = 1 + t + 2\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 2\mathrm{e}^t - t - 1$.

Problema 1.3.6 $x_n(t) = \mathrm{e}^t + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^k}{k!}$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 2\mathrm{e}^t - t - 1$.

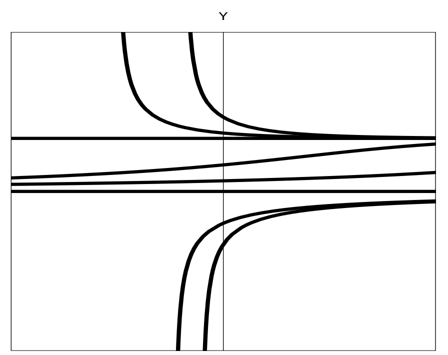
Problema 1.3.7



i) $f(x,y) = 1 - 1/y^2$ es continua y Lipschitz para cada $y \neq 0$, por lo que existe una única solución $y = y(x)$ que pasa por cada punto (x,y), $y \neq 0$. Pero $g(x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)} = \dfrac{y^2}{y^2-1}$ es continua y Lipschitz para cada $|y| \neq 1$, por lo que existe una única solución $x = x(y)$ que pasa por cada punto (x,y), $|y| \neq 1$. Por tanto pasa una única curva integral por cada punto del plano.

ii) $(y^*)' < 1 \;\Rightarrow\; y^*(x) < 2 + x$ para $x > 0$; por otro lado, como $y(x) \equiv 1$ es una solución, se tiene que y^* no puede cortarla y así $y^* > 1$; eso implica $(y^*)' > 0$, por lo que $1 < y^*(x) < 2 + x$ para todo $x \in I\!R$, es decir, y^* está definida en todo $I\!R$.
iii) $y^*(0{,}2) \approx y^*(0) + (y^*)'(0)(0{,}2 - 0) = 2 + 0{,}2 f(0,2) = 2{,}15$.

Problema 1.3.8



ii) $f(x,y) = y^2 - \lambda y^3$ es continua y Lipschitz en todo $I\!R^2$ por lo que existe una única solución $y = y(x)$ que pasa por cada punto del plano.

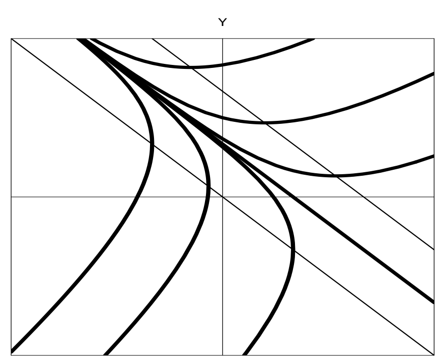
La solución que pasa por el punto (x_0, y_0) es

$x = \lambda \log \left| \dfrac{(\lambda y_0 - 1)y}{(\lambda y - 1)y_0} \right| - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y_0} + x_0$ si $y_0 \neq 0$, $y_0 \neq 1/\lambda$;

$y = 0$ si $y_0 = 0$; $y = 1/\lambda$ si $y_0 = 1/\lambda$.

iii) Las curvas integrales con $0 \leq y_0 \leq 1/\lambda$ están definidas para todo x real; las curvas con $y_0 < 0$ ó $y_0 > 1/\lambda$ tiene una asíntota vertical en $x = \lambda \log \left| \dfrac{\lambda y_0 - 1}{\lambda y_0} \right| + \dfrac{1}{y_0} + x_0$.
iv) Tomando el límite en la solución (con $y_0 \neq 0$, $y_0 \neq 1/\lambda$), para $\lambda \to 0$, se obtiene $x = \dfrac{1}{y_0} - \dfrac{1}{y} + x_0$, que es la solución correspondiente a la ecuación con $\lambda = 0$; si $y_0 = 0$ se obtiene $y = 0$ que de nuevo es la solución correspondiente a $\lambda = 0$; si $y_0 = 1/\lambda$ no tiene sentido tomar el límite $\lambda \to 0$. Por tanto hay continuidad respecto al parámetro λ.

Problema 1.3.9



ii) La solución que pasa por el punto (x_0, y_0) es

$x = \dfrac{\lambda}{2} \log \left| \dfrac{x + y - \lambda/2}{x_0 + y_0 - \lambda/2} \right| + y - y_0 + x_0$ si $x_0 + y_0 \neq \lambda/2$;

$y = \lambda/2 - x$ si $x_0 + y_0 = \lambda/2$.

iii) Haciendo $\lambda \to 0$ en la solución con $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, se obtiene $y = x + 1$, que es la solución correspondiente a $\lambda = 0$, es decir, hay continuidad respecto de λ.

iv) En el caso $x_0 = 0$, $y_0 = \lambda/2$, el límite que se obtiene es $y = -x$, mientras que la solución correspondiente a $\lambda = 0$ es $y = x$. No hay continuidad en este caso.

Problema 1.3.10
i) $f(x,y) = a\dfrac{y}{x} + \dfrac{y^3}{x^3}$ es continua y Lipschitz salvo para $x = 0$, por lo que hay una única solución $y = y(x)$ que pasa por cada punto del plano (x,y), $x \neq 0$. Además, $g(x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)} = \dfrac{x^3}{y(ax^2+y^2)}$ es continua y Lipschitz salvo para $y = 0$, por lo que hay una única solución $x = x(y)$ que pasa por cada punto del plano (x,y), $y \neq 0$. Finalmente, por cada punto del plano excepto el origen, existe una única curva integral. Como se ve en la fórmula siguiente y en los dibujos, por el origen pasan infinitas curvas integrales.
ii) Solución, dependiendo de a:

$$y^2 = |x|^{2a}\Big(\frac{|x_0|^{2a}}{|y_0|^2} + \frac{1}{a-1}(|x_0|^{2a-2} - |x|^{2a-2})\Big)^{-1} \qquad \text{si} \quad a \neq 1$$

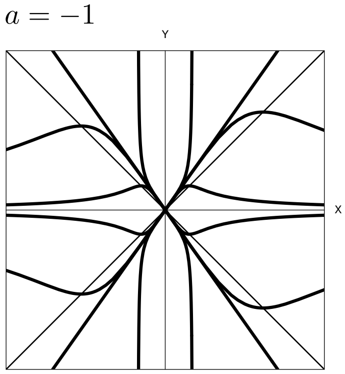
$$y^2 = |x|^2\Big(\frac{|x_0|^2}{|y_0|^2} + \log(\frac{|x_0|^2}{|x|^2})\Big)^{-1} \qquad \text{si} \quad a = 1$$

iii) La solución es continua en $a = 1$ pues en la fórmula de la solución basta observar que

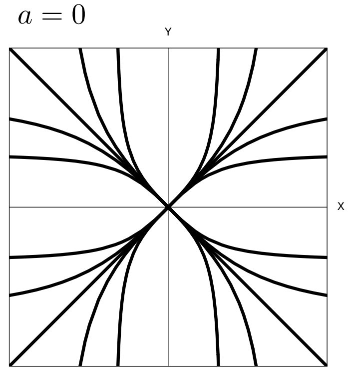
$$\lim_{a\to 1} \frac{1}{a-1}(|x_0|^{2a-2} - |x|^{2a-2}) = \log(\frac{|x_0|^2}{|x|^2}).$$

iv)

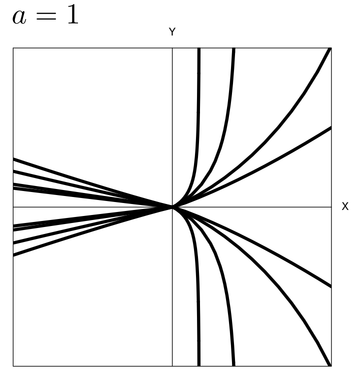
$a = -1$



$a = 0$



$a = 1$



Problema 1.3.11 La función $g(t) = (x_1(t) - x_2(t))^2$ verifica $g(t_0) = 0$, $g(t) \geq 0$ y

$$g'(t) = 2(x_1(t) - x_2(t))(f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t)) \leq 0$$

por lo que $g(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, es decir, $x_1 \equiv x_2$.

Problema 1.3.12 Todas las soluciones son $x(t) = 0$ ó $x_\tau(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{1}{4}(t-\tau)^2 & t \geq \tau \end{cases}$, para cada $\tau \geq 0$.

Problema 1.3.13 *i)* $y_1(x) = (27-3x)^{-1/3}$; $\lim\limits_{x\to 9^-} y_1(x) = \infty$. Dominio $[0,9)$. *ii)* Como $f_2(x,y) = \dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{-y^2} + y^4$ es continua y Lipschitz, existe una única solución y_2 para cada dato inicial. Como $f_2(x,y) \geq f_1(x,y) = y^4$, se tiene que, mientras esté definida, la solución del segundo problema es mayor que la del primero, $y_2 \geq y_1$, por lo que estará definida sólo en algún intervalo $[0,a)$, con $a \leq 9$.

Problema 1.3.14 *i)* $y_c(x) = \dfrac{1}{1 + \beta \operatorname{sen} x + c\,\mathrm{e}^{-x}}$. *ii)* $y(0) = \alpha \Rightarrow c = \dfrac{1}{\alpha} - 1$; como $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow c \geq 0$, se tiene que el denominador de $y_c(x)$ es siempre positivo, $1+\beta \operatorname{sen} x + c\,\mathrm{e}^{-x} \geq 1-\beta > 0$. *iii)* Poniendo $c = 0$ se tiene la solución $y_0(x) = \dfrac{1}{1 + \beta \operatorname{sen} x}$ que es periódica; claramente $|y_c(x) - y_0(x)| \leq \dfrac{c\,\mathrm{e}^{-x}}{(1-\beta)^2} \to 0$. *iv)* Si $\alpha > 1$ la constante es $c < 0$; el denominador en $x = 3\pi/2$ es $D(3\pi/2) = 1 - \beta - |c|\,\mathrm{e}^{-3\pi/2} = 0$ si $\beta = 1 - |c|\,\mathrm{e}^{-3\pi/2} \in (0, 1)$.