

4 Sistemas autónomos.

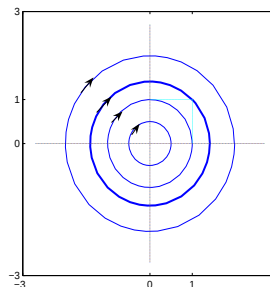
4.1 Sistemas lineales. Planos de fases

Problema 4.1.1

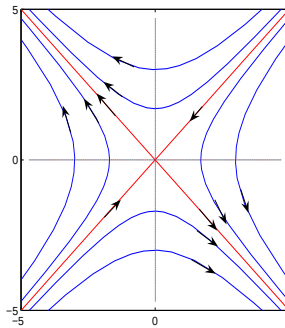
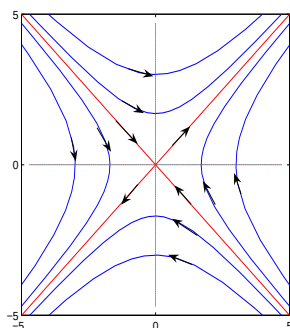
i) El punto crítico $(0,0)$ es un centro.

ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightsquigarrow x^2 + y^2 = c.$

iii) Ambos son estables, pero no asintóticamente estables.

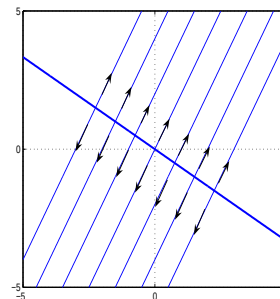


Problema 4.1.2 Las trayectorias de ambos sistemas coinciden pero están recorridas en sentido contrario y con distinta velocidad.



Problema 4.1.3 Consideremos el sistema $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, con $ad - bc = 0$ (supongamos que no todos son cero). Los puntos críticos no son aislados y constituyen una recta. $ax + by = 0$ (o $cx + dy = 0$ si $a = b = 0$). Las trayectorias son rectas paralelas de pendiente c/a (o de pendiente d/b si $a = c = 0$), acercándose o alejándose de la recta de puntos críticos según el signo de los coeficientes. Por ejemplo, para el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 4x + 6y \end{cases} \text{ el dibujo es el siguiente.}$$



Problema 4.1.4

i) El punto crítico $(1, 0)$ es un punto silla.

ii) $X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) $x'' - 4x = -4$.

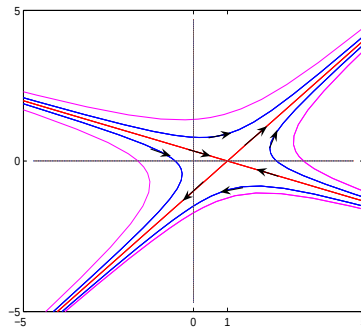
$x(t) = d_1 e^{2t} + d_2 e^{-2t} + 1$;

$y(t) = \frac{1}{3}(x'(t) + x(t) - 1) = d_1 e^{2t} - \frac{1}{3}d_2 e^{-2t}$.

iv) $(x + y - 1)dx + (x - 3y - 1)dy = 0 \rightsquigarrow x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 2y = c$.

v) Si $\bar{x} = x - 1$, queda $\frac{dy}{d\bar{x}} = \frac{\bar{x} + y}{3y - \bar{x}}$, ecuación homogénea. Si $z = y/\bar{x}$, se tiene $\frac{dz}{d\bar{x}} = \frac{1 + 2z - 3z^2}{\bar{x}(3z - 1)}$, que implica $(z - 1)(3z + 1) = c/\bar{x}^2$, es decir, $(y - x + 1)(3y + x - 1) = c$. Observemos que para $c = 0$ obtenemos las dos rectas $y - x + 1 = 0$, $3y + x - 1 = 0$.

vi) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(5e^{2t} - 3e^{-2t}) + 1 \\ y(t) = \frac{1}{2}(5e^{2t} + e^{-2t}) \end{cases}; x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 2y + 21 = 0$.



4.2 Sistemas no lineales

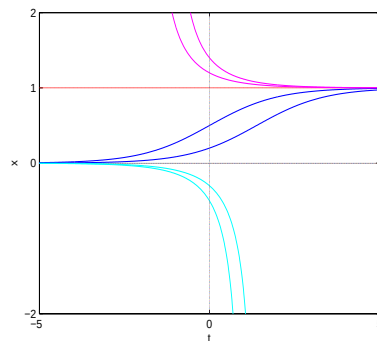
Problema 4.2.1

i) Para $x \approx 0$ se tiene $x' \approx x$, que implica $x(t) \approx x_0 e^t$; para $x \approx 1$ se tiene $x' \approx 1 - x$, que implica $x(t) \approx 1 + x_0 e^{-t}$

ii) $x(t) = \frac{x_0 e^t}{x_0(e^t - 1) + 1}$. Si $0 \leq x_0 \leq 1$ la solución está definida para todo tiempo. En caso contrario hay una asíntota vertical en $t = \log(1 - 1/x_0)$.

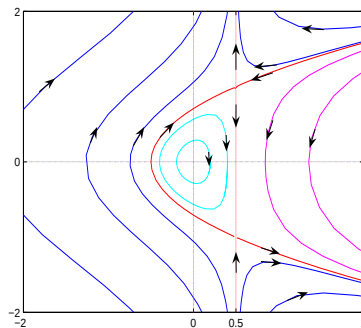
iii) Si $x_0 > 1$, la solución es decreciente con una asíntota vertical (ver apartado anterior), tendiendo a 1 para $t \rightarrow \infty$.

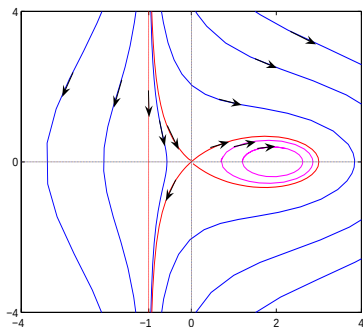
Si $0 < x_0 < 1$, la solución es creciente desde 0 hasta 1. Si $x_0 < 0$, la solución es decreciente, viniendo desde 0 para $t \rightarrow -\infty$, y con una asíntota vertical.



Problema 4.2.2

i) Puntos críticos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1/2, 1)$, $P_3 = (1/2, -1)$. El primero es centro en la aproximación lineal y también lo es en el sistema no lineal pues hay simetría respecto del eje horizontal. Los otros dos puntos son sillas. Hay dos trayectorias que unen los puntos silla, una rodeando el origen y otra sobre la recta $x = 1/2$. En la región interior todas las trayectorias son cerradas. La integración de las curvas integrales (Bernoulli) da $(1 - 2x)y^2 + 2x^2 = c$.





ii) Puntos críticos $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$. El primero es un punto silla. El otro es un centro en la aproximación lineal y también lo es en el sistema no lineal pues hay simetría respecto del eje horizontal. Hay una trayectoria cerrada que parte del origen y rodea a P_2 . En la región interior todas las trayectorias son cerradas. La integración de las curvas integrales (Bernoulli) da $3(1+x)y^2 + x^3 - 3x^2 = c$.

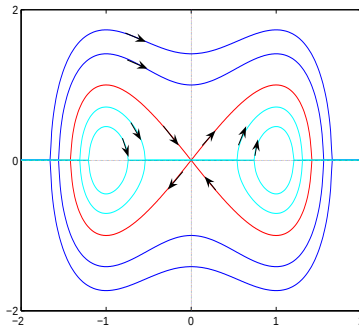
Problema 4.2.3

i) El sistema equivalente es $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - 2x^3 \end{cases}$.

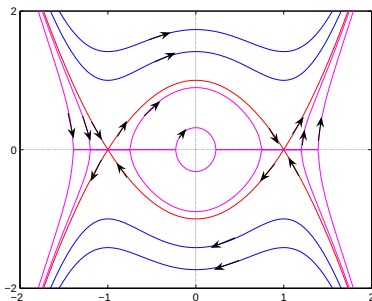
Puntos críticos $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (-1,0)$. En la aproximación lineal el primero es un punto silla, los otros dos son centros.

ii) Los centros anteriores también lo son en el sistema no lineal pues hay simetría respecto de ambos ejes. Hay dos trayectorias cerradas que parten del origen y rodean respectivamente a P_2 y P_3 . En la región interior todas las trayectorias son cerradas, rodeando a P_2 ó P_3 . En la región exterior las trayectorias son también cerradas rodeando a los tres puntos.

iii) La integración de las curvas integrales da, separando variables, $x^4 + y^2 - 2x^2 = c$. iv) $x^2 y^4 = k(x^2 - 1)$.



Problema 4.2.4



i) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x^3 - 2x \end{cases}$. Puntos críticos $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (-1,0)$. En la aproximación lineal el primero es un centro, los otros dos son sillas.

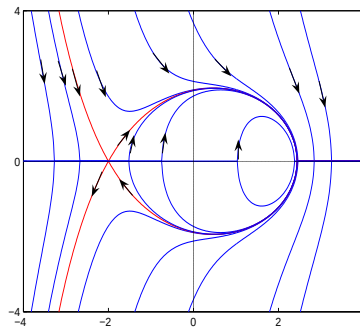
ii) En el sistema no lineal el centro se mantiene pues hay simetría respecto de ambos ejes. Hay dos trayectorias que unen los puntos silla y entre ambas rodean el origen. En la región interior todas las trayectorias son cerradas.

iii) Integrando variables separadas, $x^4 - 2x^2 - y^2 = c$.

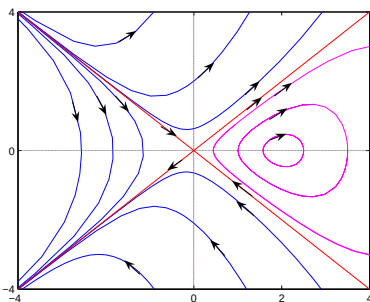
iv) Las trayectorias que unen los puntos P_2 y P_3 corresponden a $c = -1$, y cortan al eje vertical en $y = \pm 1$. Las trayectorias encerradas por éstas son cerradas, por tanto la solución es periódica si y sólo si $|a| < 1$.

Problema 4.2.5

- i) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$. Puntos críticos $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (-2, 0)$. El primero es un centro pues hay simetría respecto del eje horizontal y el segundo es un punto silla.
- ii) Hay una trayectoria que une P_2 consigo mismo rodeando a P_1 . En la región interior todas las trayectorias son cerradas rodeando a P_1 . La ecuación de las curvas integrales es $x^2 + y^2 = 5 + ce^{-x}$.
- iii) La solución $x(t)$ con $x(0) = x'(0) = 0$ corresponde a la curva cerrada que pasa por el origen y rodea a P_1 . Por tanto $x(t)$ es periódica, con mínimo 0 y máximo x_M donde $x_M > 2$ es la solución no trivial de $x^5 = 5(1 - e^{-x})$.



Problema 4.2.6



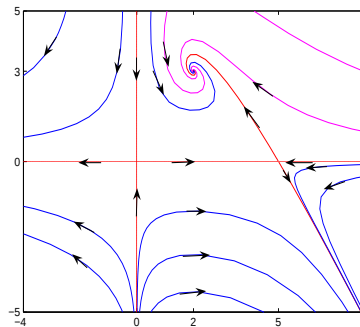
- i) $\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{2}(y^2 - x(x-2)) \end{cases}$. Puntos críticos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$. El primero es un silla, el segundo un centro (hay simetría respecto del eje horizontal).
- ii) Mediante un factor integrante o como ecuación de Bernoulli, la integración del sistema da $y^2 = x^2 + ce^x$. El valor $c = 0$ produce las rectas $y = \pm x$.

También se podrían haber obtenido las rectas directamente de la ecuación si no se ha integrado el sistema: poniendo $y = kx$ en la ecuación diferencial debe ser $k^2 = 1$.

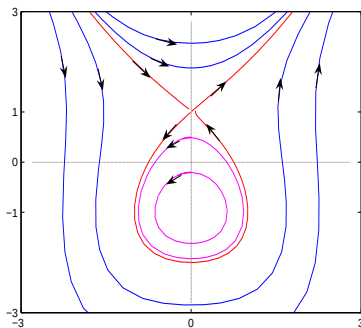
- iii) Si $c > 0$ las trayectorias están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Cuando $x \rightarrow -\infty$ es $y \sim \pm x$, mientras que para $x \rightarrow \infty$ es $y \sim \pm \sqrt{ce^x}$. Por otro lado, si $c < -4e^{-2}$, tenemos una curva con dominio $(-\infty, x_1]$, donde $x_1 < 0$ es la única solución de $x^2 + ce^x = 0$; mientras que si $-4e^{-2} < c < 0$, tenemos dos curvas, con dominios $(-\infty, x_1]$ y $[x_2, x_3]$, donde $x_1 < 0 < x_2 < 2 < x_3$ son las tres soluciones de la misma ecuación (si $c = -4e^{-2}$ tenemos que la segunda curva se reduce al punto $(2, 0)$). Entonces para algunas trayectorias no tiene sentido hablar de $x \rightarrow \infty$. En el dibujo se observan las curvas correspondientes a $c > 0$ por encima de $y = |x|$ y por debajo de $y = -|x|$; para $c < -4e^{-2}$ son las curvas en $-|x| < y < |x|$, $x < 0$, mientras que para $-4e^{-2} < c < 0$ añadimos las curvas cerradas con $-|x| < y < |x|$, $x > 0$.

Problema 4.2.7

- i) Puntos críticos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (5, 0)$ y $P_3 = (2, 3)$. Los dos primeros son puntos silla, el tercero un foco estable.
- ii) Las trayectorias en el primer cuadrante entran en P_3 rodeándolo en sentido contrario al de las agujas del reloj, una viniendo de P_2 , las demás del infinito.
- iii) Si $a = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = P_1$; si $a > b = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = P_2$; si $a > 0$, $b > 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = P_3$.



Problema 4.2.8



i) $x^4 - y^3 + 3x^2 + 3y = c$. Puntos críticos $P_1 = (0, 1)$, silla, $P_2 = (0, -1)$, centro, pues hay simetría respecto del eje vertical. Hay una trayectoria cerrada que parte de P_1 y rodea a P_2 .

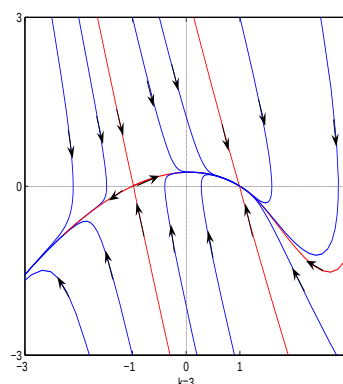
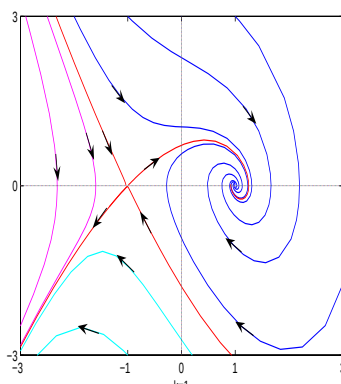
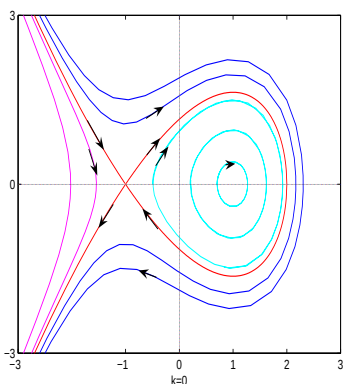
ii) La trayectoria que empieza y termina en P_1 corresponde a $c = 2$, y corta otra vez al eje vertical en $y = -2$. La solución es periódica si $-2 < a < 1$, $a \neq -1$.

Problema 4.2.9

i) El sistema equivalente es $\begin{cases} x' = y \\ y' = 1 - x^2 - ky \end{cases}$. Puntos críticos $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (1, 0)$.

El primero es un punto silla. El segundo es un centro si $k = 0$ (por simetría respecto del eje horizontal), un foco estable si $0 < k < 2\sqrt{2}$ y un nodo estable si $k \geq 2\sqrt{2}$ (degenerado o límite si $k = 2\sqrt{2}$).

ii) Si $k = 0$, hay una trayectoria que empieza y termina en P_1 y rodea a P_2 . En la región interior todas las trayectorias son cerradas. Si $k = 1$, hay una trayectoria que parte de P_1 y tiende en forma espiral a P_2 , enrollándose en sentido negativo. Si $k = 3$ hay una trayectoria que parte de P_1 y tiende a P_2 , entrando en este punto según la dirección del vector $(1, -1)$.

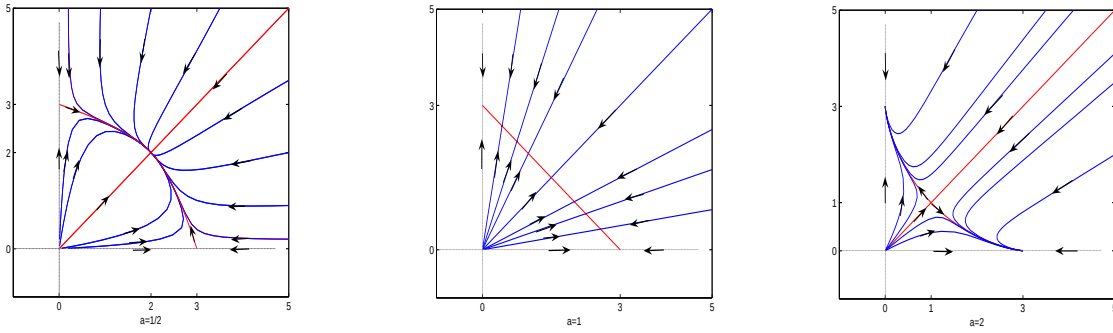


iii) Si $k = 0$ (no hay rozamiento), hay dos tipos genéricos de comportamiento: órbitas periódicas entre dos valores, x_1 y x_2 , con $-1 < x_1 < x_2 < 1$ y órbitas acotadas superiormente con $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -1$ ó $-\infty$. Si $k = 1$ (rozamiento pequeño), el comportamiento genérico es oscilante alrededor de $x = 1$, con $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$. Si $k = 3$ (rozamiento grande), se tiene también $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$, pero de forma monótona.

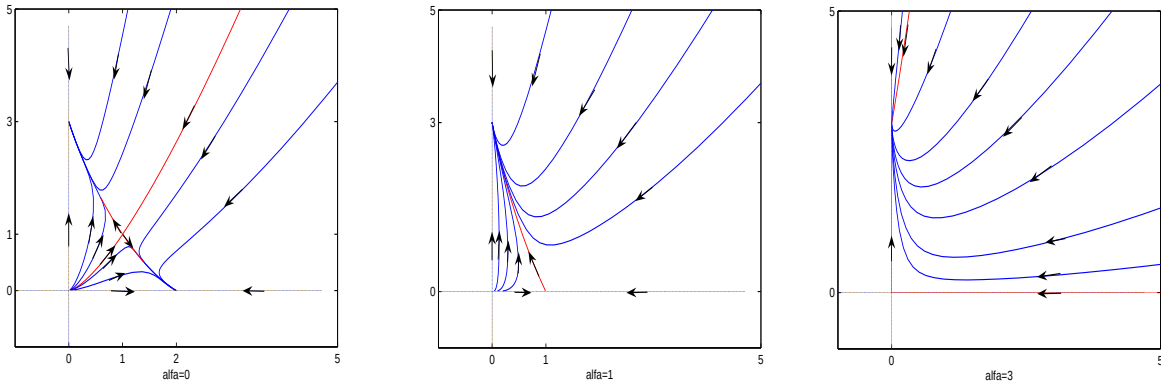
Problema 4.2.10

i) Puntos críticos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, 3)$, $P_3 = (3, 0)$, y $P_4 = (\frac{3}{a+1}, \frac{3}{a+1})$ si $a \neq 1$, mientras que si $a = 1$ son P_1 y la recta $x + y = 3$, que no son elementales. P_1 es un nodo estelar inestable en la aproximación lineal. En el sistema no lineal el punto P_1 es un nodo inestable, pues los ejes coordenados son soluciones, por lo que las trayectorias que salen del origen no pueden hacerlo en forma espiral. P_2 y P_3 son nodos estables si $a > 1$ y sillas si $a < 1$. P_4 es silla si $a > 1$ y nodo estable si $a < 1$.

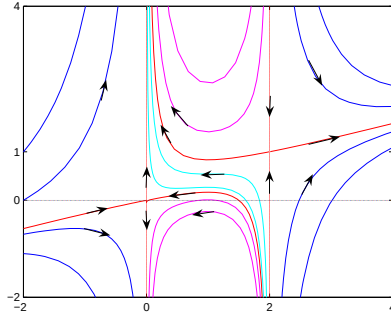
ii) Si $a = 1/2$, todas las trayectorias terminan en P_4 , salvo las contenidas en los ejes. Si $a = 1$, el sistema se puede integrar explícitamente: todas las trayectorias son segmentos de recta que terminan en la recta $x + y = 3$ (ver problema 4.1.3). Si $a = 2$, hay dos trayectorias que terminan en P_4 , todas las demás trayectorias terminan en P_2 ó P_3 , dependiendo de su posición inicial.



Problema 4.2.11 Puntos críticos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (0, 3)$ si $\alpha \geq 2$; además $P_3 = (2 - \alpha, 0)$ si $1/2 \leq \alpha < 2$ y además $P_4 = (1 + \alpha, 1 - 2\alpha)$ si $0 \leq \alpha < 1/2$. P_1 es un nodo inestable si $\alpha < 2$, silla si $\alpha > 2$. P_2 es un nodo estable. P_3 es un nodo estable si $\alpha < 1/2$, silla si $\alpha > 1/2$. P_4 es un punto silla. Sin la intervención del pescador, o con pescador de poca habilidad ($0 \leq \alpha < 1/2$), hay dos situaciones estables, todo truchas, P_3 , o todo salmones, P_2 , y una situación inestable, convivencia de truchas y salmones, P_4 . Según aumenta la habilidad del pescador ($1/2 < \alpha < 2$), sólo hay una situación estable, todo salmones, y una situación inestable, todo truchas. Cuando $\alpha > 2$ se tiene como situación estable todo salmones. Por supuesto, si inicialmente no hay truchas o salmones, esta situación se mantiene. Los casos $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 2$ dan lugar a un autovalor cero, por lo que no los estudiamos, aunque el comportamiento es más o menos como por encima de estos valores.

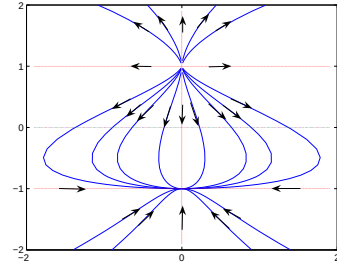


Problema 4.2.12



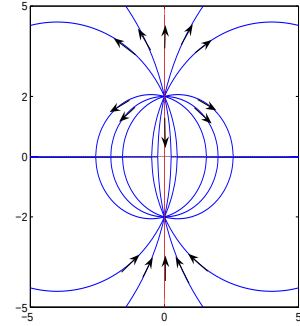
i) Puntos críticos $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,1)$, ambos sillas. La trayectoria que llega a P_1 lo hace con pendiente $1/4$, y por tanto por debajo de la recta $y = x/2$; la trayectoria que sale de P_2 lo hace con pendiente también $1/4$, y por tanto por encima de la misma recta. La pendiente de las trayectorias en esa recta debe ser 0, por lo que ninguna de las trayectorias anteriores puede cruzarla. Así pues, la trayectoria que llega a P_1 viene de $(2, -\infty)$ y la trayectoria que sale de P_2 va a $(0, \infty)$.

ii) Puntos críticos $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (0,-1)$, ambos nodos, el primero inestable y el segundo estable. Todas las trayectorias unen P_1 con P_2 . Hay simetría respecto del eje vertical.

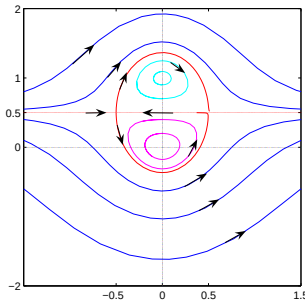


Problema 4.2.13

- i) Puntos críticos $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (0,-2)$, ambos nodos límite, el primero inestable y el segundo estable.
- ii) $(x - c)^2 + y^2 = c^2 + 4$, una familia de circunferencias con centro en el eje horizontal pasando todas por P_1 y P_2 .
- iii) $x^2 + y^2 = 4$.
- iv) $x(t)$ es decreciente desde 2 para $t = 0$ hasta 0 para $t \rightarrow \infty$.



Problema 4.2.14



i) Puntos críticos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (0,1)$, centros (hay simetría respecto del eje vertical), y $P_3 = (1/2, 1/2)$ y $P_4 = (-1/2, 1/2)$, puntos silla.

ii) Hay una trayectoria recta que une P_3 con P_4 y dos que unen P_4 con P_3 rodeando una P_1 y otra a P_2 . En las dos regiones encerradas por estas curvas todas las demás trayectorias son cerradas.

iii) Si $0 < \alpha < 1/2$ la solución $x(t)$ es periódica entre dos valores $x_1 < 0$ y $x_2 \in (0, 1/2)$. Análogamente, si $1/2 < \alpha < 1$ la solución es periódica entre dos valores $x_3 \in (1/2, 1)$ y $x_4 > 1$. Si $\alpha = 1/2$ la solución es monótona decreciente con $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -1$.

Problema 4.2.15

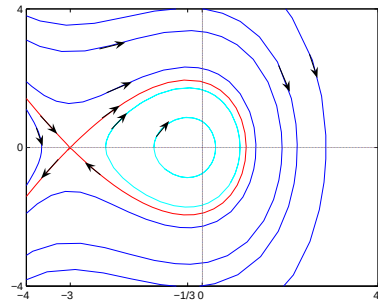
i) Si $\mu = 0$ el único punto crítico es $P = (0, 0)$, que es un centro. Si $0 < \mu < 1$, hay dos puntos críticos $P_{\pm} = (\frac{-1 \pm \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu}, 0)$, un centro y un silla. Si $\mu = 1$ hay de nuevo un único punto crítico, $P = (-1/2, 0)$, que tiene un autovalor cero. Si $\mu > 1$ no hay puntos críticos.

ii) El dibujo es muy parecido a los planos de fases de los problemas 5.1.6 ($k = 0$), 5.1.9 ii) ó 5.1.12.

iii) $10x^2 + 5y^2 + 2x^3 + 6x = c$.

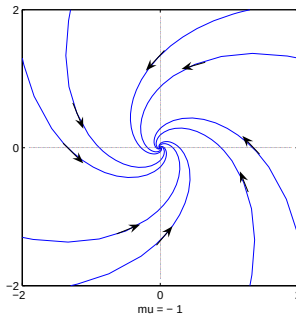
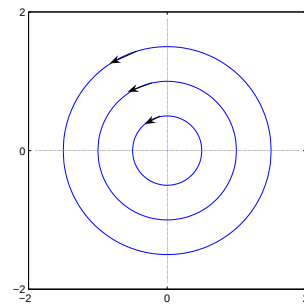
iv) Poniendo $x = -3$, $y = 0$ en la ecuación anterior se tiene $c = 18$. Esta curva corta al eje horizontal en $x = -3$ y en $x = 1$. Así pues tomamos $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

v) La solución $x(t)$ es monótona creciente en $(-\infty, 0)$, con $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -3$, $x(0) = 1$, y simétrica.



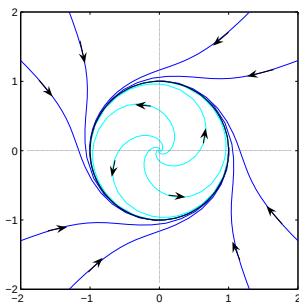
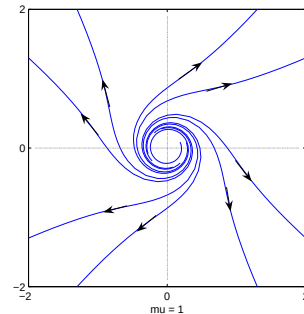
Problema 4.2.16

i) $\begin{cases} r' = 0 \\ \theta' = 1 \end{cases}$, $r = c_1 \geq 0$, $\theta = t + c_2$, circunferencias centradas en el origen recorridas en sentido positivo.



ii) $\begin{cases} r' = \mu r \\ \theta' = 1 \end{cases}$, $r(\theta) = ce^{\mu\theta}$, espirales enrollándose ($\mu < 0$) ó desenrollándose ($\mu > 0$) alrededor del origen y girando en sentido positivo.

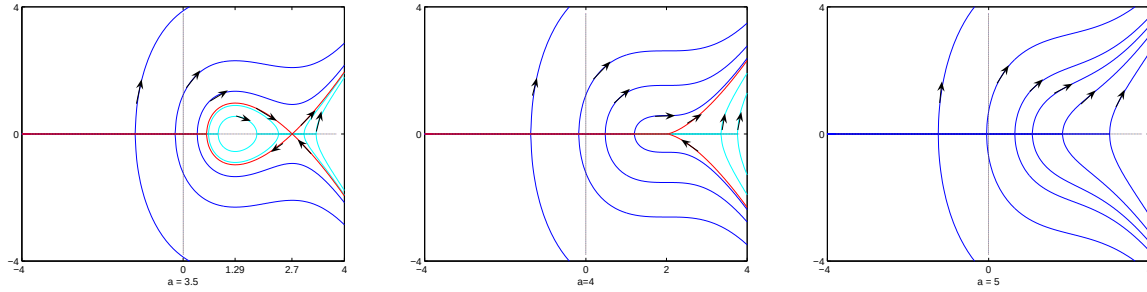
iii) $\begin{cases} r' = \mu r^3 \\ \theta' = 1 \end{cases}$, $r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{c - 2\mu\theta}}$, espirales enrollándose ($\mu < 0$) ó desenrollándose ($\mu > 0$) alrededor del origen y girando en sentido positivo, con una asíntota inclinada para $\theta = \frac{c}{2\mu}$, es decir, con pendiente $\text{tg}(c/2\mu)$.



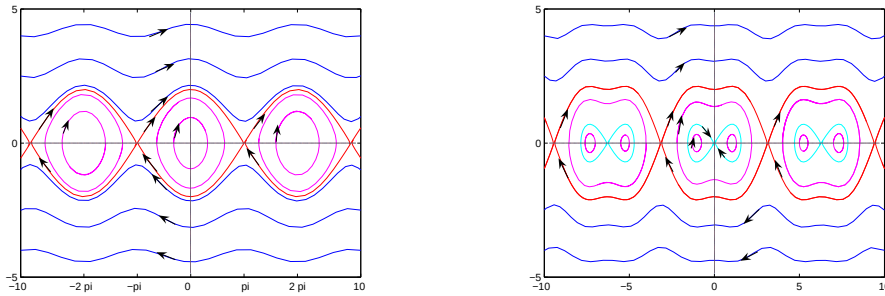
iv) $\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$, $r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - ce^{-2\theta}}}$, circunferencia de radio 1 ($c = 0$), espirales enrollándose desde el origen hasta esta circunferencia ($c < 0$), ó desde la asíntota inclinada $\theta = \frac{1}{2} \log c$ hasta la misma circunferencia ($c > 0$), y girando todas en sentido positivo.

Problema 4.2.17

Si $a < 4$ hay dos puntos críticos, $P_1 = (2 - \sqrt{4 - a}, 0)$, centro, que se mantiene por simetría, y $P_2 = (2 + \sqrt{4 - a}, 0)$, silla. Si $a = 4$ estos dos puntos colapsan en uno solo, $P = (2, 0)$, que es no elemental. Si $a > 4$ no hay puntos críticos.



Problema 4.2.18 Puntos críticos $P_k = (k\pi, 0)$ si $a \leq 1$ y además $Q_k = (\arccos \frac{1}{a}, 0)$ si $a > 1$. Si $a \leq 1$ se tiene P_k centro para k par y silla para k impar. Si $a > 1$, P_k es silla y Q_k es centro. Hay simetría respecto del eje horizontal.



Problema 4.2.19

i) Si $r' = z$, el único punto crítico del sistema obtenido es $P = (2C, 0)$, centro en la aproximación lineal.

ii) Hay simetría respecto del eje horizontal, por lo que P es un centro en el sistema no lineal.

iii) Las trayectorias son $\frac{1}{2}z^2 + \frac{C}{r^2} - \frac{1}{r} = E$.

iv) La ecuación de las trayectorias es $z = \pm\sqrt{H(r)}$, donde la gráfica de $H(r) = 2E + 2(r - C)/r^2$ depende del valor de E . Por ejemplo, para $-1/4C < E < 0$, la gráfica es:

Si $E = -1/4C$ la trayectoria se reduce al punto crítico P , es decir una órbita circular de radio $r = 2C$. Si $-1/4C < E < 0$ se tienen trayectorias cerradas entre los valores máximo y mínimo, $r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4EC}}{-2E}$, que corresponden a órbitas de tipo elíptico de radios mayor y menor $r_{\pm}$. Si $E \geq 0$ se tiene trayectorias abiertas rodeando por la izquierda a P , que corresponden con órbitas abiertas de radio mínimo r_- si $E > 0$ ó C si $E = 0$.

