2 Ecuaciones y sistemas lineales.

2.1 Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes

Problema 2.1.1

i) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} + \frac{1}{3} e^{4x}$.

ii) $y = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + 5x^2 + 4x + 2$.

iii) $y = c_1 e^{3x} + e^{-2x}(c_1 - 4x)$.

iv) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{20}(3\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$.

Problema 2.1.2

i) $x = e^{-t}(t - \operatorname{sen} t)$. *ii)* $x = e^{t}\cos 3t - 1$. *iii)* $x = \frac{1}{10}[2e^{-t}\operatorname{sen} 2t + 5t^2 - 4t]$.
iv) $x = \frac{1}{15}(t^4 - 5t^2 + 5t - \frac{1}{t})$.

Problema 2.1.3

$$\text{si } |\mu| > 2, \qquad B = \{\, e^{-t},\, e^{\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4}}{2}t},\, e^{\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4}}{2}t} \,\}$$

$$\text{si } |\mu| < 2, \qquad B = \{\, e^{-t},\, e^{-\frac{\mu}{2}t}\cos(\tfrac{\sqrt{4-\mu^2}}{2}t),\, e^{-\frac{\mu}{2}t}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{4-\mu^2}}{2}t) \,\}$$

$$\text{si } \mu = 2, \qquad B = \{\, e^{-t}, te^{-t},\, t^2 e^{-t} \,\}$$

$$\text{si } \mu = -2, \qquad B = \{\, e^{-t},\, e^{t},\, te^{t} \,\}$$

Problema 2.1.4 $x = c_1 t^2 + c_2 + c_3 t^{-1} + c_4 t^{-3}$.

Problema 2.1.5 $y = \frac{39}{40} e^{2x} + \frac{1}{40}(5x + 41)e^{-2x} - \frac{3}{5}\operatorname{sen} x - \frac{1}{8}x^2$.

Problema 2.1.6

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - 1 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 2e^{1-t} - \frac{1}{2}t^2 + 4t - 6 & \text{si} \quad t \ge 1 \end{cases}$$

Problema 2.1.7

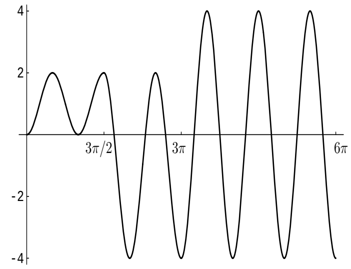
i) $I(t) = \frac{1}{3} e^{-t}\operatorname{sen} 3t$.

ii) $I(t) = \frac{1}{39}[-e^{-t}(9\cos 3t + 7\operatorname{sen} 3t) + 9\cos 2t + 6\operatorname{sen} 2t]$.

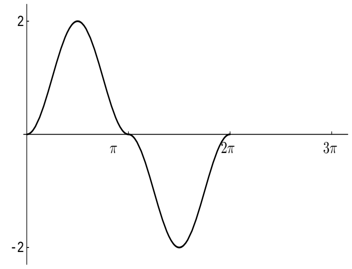
Problema 2.1.8

$$i)\ I(t) = \begin{cases} 1-\cos 2t & \text{si} \quad 0 \le t < 3\pi/2 \\ -1-3\cos 2t & \text{si} \quad 3\pi/2 \le t < 3\pi \\ -4\cos 2t & \text{si} \quad t \ge 3\pi \end{cases}$$

ii)



$$iii)\ I(t) = \begin{cases} 1-\cos 2t & \text{si} \quad 0 \le t < \pi \\ \cos 2t - 1 & \text{si} \quad \pi \le t < 2\pi \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 2\pi \end{cases}$$



Problema 2.1.9

i) $u(t) = \dfrac{1}{2(\omega^2-4)}(\cos 2t - \cos \omega t)$. *ii)* $\lim\limits_{\omega\to 2} u(t) = \dfrac{1}{8} t \operatorname{sen} 2t$. *iii)* $u(t) = \dfrac{1}{8} t \operatorname{sen} 2t$.

2.2 Sistemas lineales

Problema 2.2.1

i) $\begin{cases} x'' + 2x' + 3x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -3 \\ y = -x - x' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t) \\ y(t) = \mathrm{e}^{-t}(2\cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t) \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x'' + 9x = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2 \\ y = \dfrac{1}{2}(x + 2 - x') \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{3}\operatorname{sen} 3t \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t - \cos 3t + 1 \end{cases}$

iii) Se puede resolver escalonadamente:

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^t \quad \rightsquigarrow \quad y(t) = c_2\mathrm{e}^{2t} - c_1\mathrm{e}^t \quad \rightsquigarrow \quad z(t) = c_3\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}c_1\mathrm{e}^t$$

Problema 2.2.2 Autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = 1$, $\vec{u}_1 = (1,1)$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{u}_2 = (2,1)$. Entonces

$$\vec{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}$$

es decir $\begin{cases} x(t) = c_1\mathrm{e}^t + 2c_2\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

Problema 2.2.3

i) El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - 6$. Como $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$ son sus dos soluciones, se debe tener

$$\begin{cases} \lambda_1\,\lambda_2 = -4 = ab - 6 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 3 = a + b \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad a = 2,\ b = 1.$$

ii) Los autovectores son $\vec{u}_1 = (1, -1)$, $\vec{u}_2 = (3, 2)$. La solución es

$$\vec{X}(t) = -3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t}$$

Problema 2.2.4 El problema es

$$\begin{cases} P'' + 2P' + 10P = 10t + \dfrac{1}{3} \\ P(0) = \dfrac{2}{3}, \quad P'(0) = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

y la solución $P(t) = \mathrm{e}^{-t}(\frac{5}{6}\cos 3t - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3t) + t - \frac{1}{6}$.

Problema 2.2.5 El sistema es

$$\begin{cases} 2x_1'' = -4x_1 + 2(x_2 - x_1) \\ x_2'' = -2(x_2 - x_1) \\ x_1(0) = x_2(0) = \dfrac{1}{2} \\ x_1'(0) = x_2'(0) = 0 \end{cases}$$

y la solución

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{6}(2\cos t + \cos 2t) \\ x_2(t) = \dfrac{1}{6}(4\cos t - \cos 2t) \end{cases}$$

2.3 Ecuaciones lineales con coeficientes variables

Problema 2.3.1

i) Poniendo $p(x) = y'(x)$ se tiene el problema $\begin{cases} (x^2 + 2p)p' + 2xp = 0 \\ p(0) = 0 \end{cases}$. Resolviendo (la ecuación es exacta), queda $x^2p + p^2 = 0$. Sacando factor común, tenemos así dos problemas: $y' = 0$ ó $x^2 + y' = 0$, ambos con el dato $y(0) = 1$. Sus soluciones son $y = 1$ e $y = 1 - \dfrac{x^3}{3}$.

ii) Poniendo $p(y) = y'(x)$ se tiene el problema $\begin{cases} ypp' = y^2p + p^2 \\ p(2) = 2 \end{cases}$, que implica $p = y(y-1)$. Resolviendo ahora el problema $\begin{cases} y' = y(y-1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ se tiene $y = \dfrac{2}{2 - \mathrm{e}^x}$.

iii) $p(x) = y'(x) \rightsquigarrow \begin{cases} pp' = p\mathrm{e}^y \\ p(0) = 2 \end{cases} \rightsquigarrow p = \mathrm{e}^y + 1 \rightsquigarrow \begin{cases} y' = \mathrm{e}^y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow y = x - \log|2 - \mathrm{e}^x|$.

Problema 2.3.2 $u(r) = 3(1 + \log_2 r)$.

Problema 2.3.3

i) $a = n^2\pi^2$, para cada $n \in I\!N$; $u_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$.

ii) $a = n^2 + 1$, para cada $n \in I\!N$; $u_n(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} nx$.

Problema 2.3.4

i)

$$y_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{x^{1-a}}{a(1-a)} + \dfrac{1}{1-a} & \text{si} \quad a \neq 0,\ a \neq 1 \\ x \log x - x + 1 & \text{si} \quad a = 0 \\ x - \log x - 1 & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

ii) y_a es función continua de a pues $\lim_{a\to 0} y_a = y_0,\ \lim_{a\to 1} y_a = y_1$.

Problema 2.3.5

i) Multiplicando la ecuación para y_2 por y_1, restándole la ecuación para y_1 multiplicada por y_2, se obtiene que el wronskiano $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ verifica la ecuación $W' + PW = 0$.

ii) $y_2(x) = y_1(x) \displaystyle\int^x \frac{W(z)}{y_1^2(z)} dz = y_1(x) \int^x \frac{e^{-\int^z P(s)ds}}{y_1^2(z)} dz.$

iii) 1) $W(x) = x^2 e^x \rightsquigarrow y_2(x) = x e^x$.

2) $W(t) = \dfrac{1}{t^2} \rightsquigarrow y_2(t) = -\dfrac{\cos t}{t}$.

Problema 2.3.6 $W(x) = \dfrac{1}{x^2-1} \rightsquigarrow y(x) = c_1 x + c_2[1 + \dfrac{1}{2} x \log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)]$.

Problema 2.3.7 $W(x) = \dfrac{1}{x} \rightsquigarrow y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.

Problema 2.3.8

i) y *ii)* El wronskiano $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ no se anula nunca.

iii) Sean a y b dos ceros consecutivos de y_1. Como y_1' tiene signos cambiados en a y en b, y W tiene signo constante, se deduce que y_2 tiene signos cambiados en a y en b, por lo que existe un punto intermedio donde se anula.

Problema 2.3.9

i) $P'' + R = Q'$. *ii)* $y = x^{-2}(c_1 e^x + c_2)$.

Problema 2.3.10

i) Poniendo $x = ux_1 + vx_2$ en la ecuación $L(x) = R$, se obtiene el sistema para $z = u'$, $w = v'$,

$$\begin{cases} x_1 z + x_2 w = 0 \\ x_1' z + x_2' w = R \end{cases}$$

cuyas soluciones son $z = -\dfrac{Rx_2}{W},\ w = \dfrac{Rx_1}{W}$.

ii) $G(t,s) = \dfrac{x_1(s)x_2(t) - x_1(t)x_2(s)}{x_1(s)x_2'(s) - x_1'(s)x_2(s)}$.

iii) 1) $x_1(t) = \cos t,\ x_2(t) = \operatorname{sen} t \rightsquigarrow G(t,s) = \cos s \operatorname{sen} t - \cos t \operatorname{sen} s = \operatorname{sen}(t-s)$.

2) $x_1(t) = e^{-t}\cos t,\ x_2(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t \rightsquigarrow G(t,s) = e^{-(t-s)}\operatorname{sen}(t-s)$.

iv) 1) $W(t) = te^t$, $x_2(t) = e^t$, $x_p(t) = \dfrac{1}{2}t^2 e^t \rightsquigarrow x(t) = \dfrac{1}{2}e^t(t^2 - 5) + e(t+1)$.

2) $W(t) = t^2$, $x_2(t) = t^2$, $x_p(t) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\log t \rightsquigarrow x(t) = \dfrac{1}{4}(2\log t + t^2 + 3)$.