PROBLEMAS DE EDO
2^{O} Ing. Industrial
CURSO 2009–2010

3 Transformada de Laplace.

3.1 Cálculo de transformadas y antitransformadas

Problema 3.1.1 Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$\begin{array}{llll} i) & f(t) = t^2 \mathrm{e}^{-t} \cos t & ii) & f(t) = \cos^3 t, \\ iii) & f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} & iv) & f(t) = t \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x dx \end{array}$$

Indicación: *ii*) $\cos^3 t = A \cos t + B \cos 2t + C \cos 3t$.

Problema 3.1.2 Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

i) $f(t) = t - n$, si $n \le t < n+1$, $n \in \mathbb{N}$ (es decir, $f(t) = t - [t]$, donde $[t]$ representa la parte entera de t, y así $f(t)$ es la parte decimal).

ii) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1 \\ (t-1)^k & t > 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$.

iii) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1 \\ t^k & t > 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$.

iv) $f(t) = (-1)^{[t]}$.

Problema 3.1.3 Hallar la transformada inversa de Laplace de las funciones

$$\begin{array}{llllll} i) & F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^{-3s}}{s^3+4s} & ii) & F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+5} & iii) & F(s) = \dfrac{2s+1}{s^3+9s} \\ iv) & F(s) = \dfrac{6}{s^2+4s+13} & v) & F(s) = \dfrac{1}{s^2-s^4} & vi) & F(s) = \dfrac{1}{(s^2+k^2)^2} \end{array}$$

Indicación: *vi*) calcular $(s/(s^2+k^2))'$.

Problema 3.1.4 Hallar la transformada de Laplace de $g(t) = (f(t))_+$ siendo $f(t) = \operatorname{sen} kt$.

Problema 3.1.5

i) Probar la identidad $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^\infty F(s) ds$.

ii) Utilizar esta identidad para calcular

$$1) \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \qquad 2) \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} dx$$

Problema 3.1.6 Sea f una función analítica con desarrollo de Taylor $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n t^n$, convergente para todo $t \in \mathbb{R}$. Calcular su transformada de Laplace. Como aplicación calcular las transformadas de Laplace de las funciones *i)* $f(t) = \cos t$,

ii) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ (ver problema 3.1.1.*iii*)),

iii) $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$,

iv) $f(t) = J_0(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(t/2)^{2n}}{(n!)^2}$,

v) $f(t) = J_0(t^{1/2})$.

Indicación: *iv)* $(1+z)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} z^k$.

Problema 3.1.7 Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones

$$i)\ F(s) = \log(1 + 1/s) \qquad ii)\ F(s) = \log(1 + 1/s^2)$$

Problema 3.1.8 Hallar la transformada de Laplace de la función $y(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt$ y deducir el valor de $y(x)$.

3.2 Resolución de ecuaciones mediante transformada de Laplace

Problema 3.2.1 Resolver los siguientes problemas de valor inicial

$$i)\ \left\{\begin{array}{l} y' - 5y = \cos 3t \\ y(0) = 1/2 \end{array}\right. \qquad ii)\ \left\{\begin{array}{l} y'' - y = \mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$iii)\ \left\{\begin{array}{l} y'' + 16y = \cos 4t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{array}\right. \qquad iv)\ \left\{\begin{array}{l} y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-3t} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$v)\ \left\{\begin{array}{l} y'' - 6y' + 9y = t^2\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6 \end{array}\right. \qquad vi)\ \left\{\begin{array}{l} y'' + 4y' + 6y = 1 + \mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

Problema 3.2.2 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\left\{\begin{array}{l} x' - 6x + 3y = 8\mathrm{e}^t \\ y' - 2x - y = 4\mathrm{e}^t \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0 \end{array}\right.$

Problema 3.2.3 Resolver los problemas (ver también problema 2.1.6.*i*))

$$i)\ \left\{\begin{array}{l} y'' + y' = \left\{\begin{array}{ll} t+1 & 0 < t < 1 \\ 3-t & t > 1 \end{array}\right. \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0 \end{array}\right. \qquad ii)\ \left\{\begin{array}{l} y'' + 4y = \left\{\begin{array}{ll} \cos 2t & 0 < t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{array}\right. \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

Problema 3.2.4 Resolver el problema $\left\{\begin{array}{l} x'' - x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{array}\right.$ donde $f(t) = \mathrm{e}^t$ si $\pi/2 < t < \pi$, $f(t) = 0$ en el resto.

Problema 3.2.5 Resolver los siguientes problemas

$$i)\ \begin{cases} y'''' - y = G_3(t-1) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} y'' - y = G_4(t-3) \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$$

donde $G_a(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ 0 & t < 0 \text{ ó } t > a \end{cases}$

Problema 3.2.6 Hallar la solución del problema $\begin{cases} y'' - y' = f_n(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ con una fuente dada por $f_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ ne^{n-nt} & t \geq 1 \end{cases}$ y estudiar qué sucede cuando $n \to \infty$.

Problema 3.2.7 Resolver los problemas 2.2.1 y 2.1.8 mediante transformada de Laplace.

Problema 3.2.8 Resolver el problema $\begin{cases} x' = -y + f(t) \\ y' = x - 2y \\ x(0) = -\mathrm{e},\ y(0) = 0 \end{cases}$ con $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ t & t \geq 1 \end{cases}$

Problema 3.2.9 Resolver el problema $\begin{cases} y'' + 2cy' + y = \delta(t-1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ distinguiendo los casos $c > 1$, $c = 1$ y $0 \leq c < 1$.

Problema 3.2.10

i) Calcular la transformada de Laplace de la distribución $\delta'(t-a)$, $a \geq 0$.

ii) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = \delta'(t-a)$ con condiciones iniciales $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, estudiando la regularidad de la solución obtenida.

iii) ¿Qué ocurre si reemplazamos $\delta'(t-a)$ por $\delta''(t-a)$?

Problema 3.2.11 Resolver el problema $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ comprobando que se tiene la representación $y(t) = \int_0^t G(t,\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$ dada en el problema 2.3.10 *iii*).

Problema 3.2.12 Se considera la ecuación diferencial $tx'' + 2x' + tx = 0$ para $t > 0$.

i) Escribir la ecuación que resulta para la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ con el dato inicial $x(0) = 1$.

ii) Resolver la ecuación para $X(s)$ utilizando la propiedad $\lim_{s\to\infty} X(s) = 0$.

iii) Calcular la antitransformada de Laplace $x(t)$ (ver problemas 2.3.5.*iii*) y 3.1.1.*iii*)).

Problema 3.2.13 Se considera la ecuación integral de Volterra $y(t) + \int_0^t k(t-s)y(s)ds = f(t)$, donde f y k son conocidas y hay que determinar y.

i) Tomando transformadas de Laplace de la ecuación obtener una expresión para $L(y)$ en términos de $L(f)$ y $L(k)$.

ii) Resolver la ecuación con $k(z) = z$, $f(t) = \operatorname{sen} 2t$ y comprobar que es equivalente al problema $\begin{cases} y'' + y = -4 \operatorname{sen} 2t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

iii) Resolver la ecuación $y(x) = x - 1 + 2\int_0^x \operatorname{sen}(x-t) y(t) dt$ y escribir el problema diferencial equivalente.

Problema 3.2.14 Se considera la ecuación $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\int_0^x \cos(x-t) f(t)\, dt$.

i) Resolverla mediante transformada de Laplace.

ii) Derivando dos veces la ecuación, convertirla en un problema de valores iniciales para una ecuación de segundo orden y resolverla.

iii) Las mismas cuestiones para el problema $\begin{cases} f'(x) + \int_0^x f(t)\, dt = 1 - \operatorname{sen} x \\ f(0) = 0. \end{cases}$

Problema 3.2.15 Una masa sujeta a un resorte se suelta a partir del reposo 2m por debajo de la posición de equilibrio del sistema resorte-masa y empieza a vibrar. Al cabo de 3π segundos la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. Calcular el desplazamiento a partir del equilibrio en el instante t.

Problema 3.2.16 Una viga de longitud $2a$ está empotrada en un soporte por su extremo izquierdo, permaneciendo libre por el derecho. La deflexión vertical de la viga a una distancia x del soporte se designa mediante $y(x)$. Si la viga tiene una carga concentrada L que actúa en su centro, entonces la deflexión debe satisfacer el problema con valores en la frontera,

$$\begin{cases} EIy'''' = L\delta(x-a) \\ y(0) = y'(0) = y''(2a) = y'''(2a) = 0 \end{cases}$$

donde E e I denotan, respectivamente, el módulo de elasticidad y el momento de inercia que supondremos constantes. Determinar la deflexión en cada punto de la viga, resolviendo el problema de valor inicial $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = A$, $y'''(0) = B$ y calculando A y B a partir de las condiciones que satisface la solución en el extremo $x = 2a$.

Problema 3.2.17 Se considera el problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ que modeliza el movimiento de un resorte al que se le aplica una fuerza externa. Resolver e interpretar los casos:

$$i)\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - 2k\pi) \qquad ii)\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\pi)$$