INGENIERIA INDUSTRIAL

EXAMEN FINAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

31 de enero de 2009

Entregar las preguntas en hojas separadas. **Tiempo: 3.30 horas**

PROBLEMA 1. (2.5 puntos)

1. El Pb-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene una semivida de 3.3 horas (es decir, en cualquier momento dado hay el doble de isótopo que 3.3 horas después). Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90 %?

2. Supongamos que tenemos un gramo de un material radiactivo exótico que se desintegra en cada momento con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda 1/4 de gramo, ¿al cabo de cuántos años tendremos 0.1 gramos? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

PROBLEMA 2. (2.5 puntos)

(1) Se considera la ecuación lineal

$$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0\,, \qquad x > 0.$$

Sabiendo que $y_1 = e^x$ es solución particular, encuentra la solución general (una buena opción es usar el método de variación de las constantes o de reducción del orden para encontrar otra solución linealmente independiente).

(2) Resuelve el problema

$$\begin{cases} xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = e^x\,, \quad x > 0 \\ y(1) = y'(1) = 0\,. \end{cases}$$

PROBLEMA 3. (2.5 puntos) Resuelve la siguiente ecuación integro-diferencial

$$\begin{cases} y'(t) = \cos t + \displaystyle\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \\ \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

PROBLEMA 4. (2.5 puntos) Considera el sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = y\,(x^2 - 4) \\ y' = x\,(x^2 + y^2)\,. \end{cases}$$

(1) Determina los puntos críticos, las isoclinas horizontales (de pendiente 0) y las isoclinas verticales (de pendiente infinito).

(2) Dibuja el diagrama de fases y estudia la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos críticos. Determina las isoclinas que también son trayectorias del sistema.

(3) Halla los valores de a tales que la trayectoria que comienza en $(a, 0)$ es periódica.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$L(f')(s) = s\,L(f)(s) - f(0)\,,$$
$$L(f * g)(s) = L(f)(s) \cdot L(g)(s)\,.$$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$\begin{aligned}
f(t) &= 1\,, & L(f)(s) &= \frac{1}{s}\,,\\
f(t) &= t^n\,, & L(f)(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}\,,\\
f(t) &= t^a\,, & L(f)(s) &= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\,,\\
f(t) &= \operatorname{sen}(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \cos(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\,, & L(f)(s) &= \arctan\frac{a}{s}\,,\\
f(t) &= e^{at}\,, & L(f)(s) &= \frac{1}{s-a}\,,\\
f(t) &= e^{at}t^b\,, & L(f)(s) &= \frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}\,,\\
f(t) &= e^{at}\operatorname{sen}(bt)\,, & L(f)(s) &= \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,,\\
f(t) &= e^{at}\cos(bt)\,, & L(f)(s) &= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\,,\\
f(t) = \operatorname{senh}(at) &= \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\,, & L(f)(s) &= \frac{a}{s^2-a^2}\,,\\
f(t) = \cosh(at) &= \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\,, & L(f)(s) &= \frac{s}{s^2-a^2}\,,\\
f(t) &= \delta(t)\,, & L(f)(s) &= 1\,.
\end{aligned}$$