INGENIERIA INDUSTRIAL

SOLUCIONES DEL EXAMEN FINAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

31 de enero de 2009

Entregar las preguntas en hojas separadas. **Tiempo: 3.30 horas**

PROBLEMA 1. (2.5 puntos)

1. El Pb-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene una semivida de 3.3 horas (es decir, en cualquier momento dado hay el doble de isótopo que 3.3 horas después). Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90 %?

2. Supongamos que tenemos un gramo de un material radiactivo exótico que se desintegra en cada momento con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda 1/4 de gramo, ¿al cabo de cuántos años tendremos 0.1 gramos? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

Solución: (1) Llamando $X(t)$ a la cantidad de Pb-209 (en gramos) presente en el instante t (en horas), tenemos que

$$X'(t) = -kX(t)$$

para cierta constante $k > 0$. Ésta es una ecuación en variables separables. Por tanto, integrando en ambos miembros la igualdad:

$$\frac{X'(t)}{X(t)} = -k$$

se obtiene

$$\log X(t) = -kt + c \iff$$
$$\iff X(t) = Ce^{-kt}$$

para una constante C desconocida. Al principio tenemos un gramo de Pb-209, esto es, $X(0) = 1$, luego

$$X(0) = Ce^{-k\cdot 0} \iff 1 = C$$

Por otro lado, como la semivida es de 3.3 horas, al cabo de 3.3 horas ha de quedar la mitad del Pb-209 de partida, y así

$$X(3{,}3) = 1/2 \iff e^{-3{,}3k} = 1/2 \iff$$
$$-3{,}3k = \log(1/2) \iff k = \frac{\log(1/2)}{-3{,}3} = \frac{\log 2}{3{,}3}$$

y con esto la expresión de $X(t)$ queda

$$X(t) = e^{-\frac{\log 2}{3{,}3}t}$$

Buscamos un t tal que $X(t) = 0{,}1$, con lo cual ha de ser

$$e^{-\frac{\log 2}{3{,}3}t} = 0{,}1 \iff -\frac{\log 2}{3{,}3}t = \log 0{,}1 \iff$$
$$\iff t = 3{,}3\frac{\log 0{,}1}{-\log 2} = 3{,}3\frac{\log 10}{\log 2} \approx 10{,}96236271 \text{ horas.}$$

(2) Llamamos ahora $Y(t)$ a la cantidad de material (en gramos) presente en el instante t (en años). Tenemos que

$$Y'(t) = -2k\sqrt{Y(t)} \tag{*}$$

para cierta constante $k > 0$ (supondremos siempre que $\sqrt{Y(t)} \geq 0$). De nuevo, es una ecuación en variables separables. Integrando en ambos miembros la igualdad:

$$\frac{Y'(t)}{\sqrt{Y(t)}} = -2k$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{Y(t)} = c - kt \iff \\ \iff Y(t) = (c-kt)^2 \end{aligned}$$

para cierta constante $c \geq 0$ (porque $\sqrt{Y(t)} \geq 0$). Los datos iniciales se traducen en las condiciones $Y(0) = 1$ y $Y(1) = 1/4$. Por tanto:

$$\begin{aligned} Y(0) = c^2 = 1 \iff c = 1 \\ Y(1) = (1-k)^2 = 1/4 \iff \\ \iff k = 1/2 \end{aligned}$$

(Otra posibilidad sería $k = 3/2$, pero así se tiene $\sqrt{Y(1)} = c - kt = -1/2$, contradiciendo la hipótesis $\sqrt{Y(t)} \geq 0$.)

Tenemos, pues:

$$Y(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2$$

Para la primera pregunta, buscamos un t tal que $Y(t) = 0{,}1$, con lo cual ha de ser

$$\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 = 0{,}1 \iff 1 - \frac{t}{2} = \sqrt{0{,}1} \iff t = 2 \cdot \left(1 - \sqrt{0{,}1}\right) \approx 1{,}367544467 \text{ años.}$$

Para el tiempo de extinción del material, se tendrá

$$\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 = 0 \iff 1 - \frac{t}{2} = 0 \iff t = 2 \text{ años.}$$

PROBLEMA 2. (2.5 puntos)

(1) Se considera la ecuación lineal

$$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0\,, \qquad x > 0.$$

Sabiendo que $y_1 = e^x$ es solución particular, encuentra la solución general (una buena opción es usar el método de variación de las constantes o de reducción del orden para encontrar otra solución linealmente independiente).

(2) Resuelve el problema

$$\begin{cases} xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = e^x\,, \quad x > 0 \\ y(1) = y'(1) = 0\,. \end{cases}$$

Solución: (1) Una segunda solución es $y_2 = vy_1$ donde

$$v' = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P\,dx} = \frac{1}{e^{2x}}\, e^{-\int \frac{1-2x}{x}\,dx} = \frac{1}{e^{2x}}\, e^{2x} e^{-\log x} = \frac{1}{x}\,.$$

Por tanto, $v = \log x$ con lo que $y_2 = e^x \log x$. Así pues, la solución general de la ecuación es

$$y = (c_1 + c_2 \log x)\, e^x \,.$$

(2) Debemos encontrar una solución particular de la ecuación completa. Para encontrarla podemos usar, por ejemplo, el método de variación de las constantes: $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ donde v_1', v_2' son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} v_1' e^x + v_2' e^x \log x = 0\,, \\ v_1' e^x + v_2' e^x (\frac{1}{x} + \log x) = \frac{e^x}{x} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} v_1' + v_2' \log x = 0\,, \\ v_1' + v_2' (\frac{1}{x} + \log x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

De estas ecuaciones deducimos que $v_2' = 1$, lo que implica $v_2 = x$, y $v_1' = -\log x$. Integrando por partes, se obtiene que $v_1 = x - x\log x$, con lo que

$$y_p = (x - x\log x)e^x + xe^x \log x = xe^x \,.$$

Para obtener esta solución particular, también podría haberse intentado buscar una solución del tipo $y_p = Bxe^x$ (no intentamos buscar una solución del tipo $y_p = Be^x$, ya que $y_1 = e^x$ es solución de la ecuación homogénea). Derivando y sustituyendo en la ecuación, se obtiene fácilmente que debe ser $B = 1$.

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \log x + xe^x \,.$$

La condición $y(1) = 0$ implica que debe ser $c_1 = -1$, mientras que la condición $y'(1) = 0$ implica $c_2 = -1$. Finalmente,

$$y = -e^x - e^x \log x + xe^x = (x - 1 - \log x)e^x \,.$$

PROBLEMA 3. (2.5 puntos) Resuelve la siguiente ecuación integro-diferencial

$$\begin{cases} y'(t) = \cos t + \displaystyle\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \\ \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Solución: Tomamos transformadas de Laplace en ambos miembros y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{y(t) \star \cos t\right\} = Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

Tenemos

$$sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2+1} + Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

Operando

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

Tomando transformadas inversas obtenemos la solución del problema

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + 1\,.$$

PROBLEMA 4. (2.5 puntos) Considera el sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = y\,(x^2 - 4) \\ y' = x\,(x^2 + y^2)\,. \end{cases}$$

(1) Determina los puntos críticos, las isoclinas horizontales (de pendiente 0) y las isoclinas verticales (de pendiente infinito). Determina las isoclinas que también son trayectorias del sistema.

(2) Dibuja el diagrama de fases y estudia la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos críticos.

(3) Halla los valores de a tales que la trayectoria que comienza en $(a, 0)$ es periódica.

Solución: (1) Los puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y\,(x^2 - 4) = 0 \\ x\,(x^2 + y^2) = 0\,. \end{cases}$$

Es fácil ver que $(x, y) = (0, 0)$ es la única solución del sistema.

Las isoclinas horizontales (de pendiente 0) verifican $y' = x(x^2 + y^2) = 0$, por lo que es la recta $x = 0$.

Las isoclinas verticales (de pendiente infinito) verifican $x' = y(x^2 - 4) = 0$, por lo que son las rectas $y = 0$, $x = 2$ y $x = -2$. Como las rectas verticales $x = 2$ y $x = -2$ son isoclinas verticales, también son trayectorias del sistema.

(2) Como $y(x^2 - 4)$ es una función impar en la variable y, y $x(x^2 + y^2)$ es una función par en la variable y, entonces el diagrama de fases es simétrico con respecto al eje X (excepto por las flechas), y basta dibujarlo en el semiplano superior.

Por tanto, para estudiar el signo de $dy/dx = y'/x'$, basta hacerlo en las regiones del semiplano superior separadas por las isoclinas $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. Sustituyendo un punto de cada una de las regiones en y'/x', se deduce que el signo de dy/dx es:

Teniendo en cuenta las isoclinas y el crecimiento de y como función de x, es fácil dibujar el diagrama de fases en el semiplano superior. En el semiplano inferior las trayectorias son simétricas.

Para dibujar las flechas que representan la evolución temporal de las trayectorias, basta observar que en el semiplano de la derecha se tiene $x > 0$ e $y' = x(x^2 + y^2) > 0$, por lo que y aumenta y las flechas apuntan hacia arriba, y que en el semiplano de la izquierda se tiene $x < 0$ y $y' = x(x^2 + y^2) < 0$, por lo que y disminuye y las flechas apuntan hacia abajo.

El único punto crítico es $(0, 0)$. Como el diagrama de fases es simétrico con respecto al eje X, las trayectorias que se encuentran en la región $-2 < x < 2$ son cerradas. Dado que $(0, 0)$ está rodeado por trayectorias cerradas, es un centro y, por tanto, es estable pero no asintóticamente estable.

(3) Como acabamos de ver, las trayectorias cerradas (o periódicas) son aquellas que se encuentran en la región $-2 < x < 2$. Por tanto, la trayectoria que comienza en $(a, 0)$ es periódica si y sólo si $-2 < a < 2$.