APUNTES DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
PARA INGENIEROS DE TELECOMUNICACIONES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

5. Función de Green I. Dominios acotados

5.1. Ecuación de ondas

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) \;=\; c^2\Delta_x u(x,t) + Q(x,t) & \text{si } x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x\in\Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0) \;=\; g(x) & \text{si } x\in\Omega \\ +\text{CCPNH} & \text{(condiciones de contorno posiblemente no homogéneas)} \end{cases}$$

La función de Green $G(x,t;x_0,t_0)$ para este problema es una solución debida a una fuente unidad concentrada en $x=x_0$ actuando sólo en el tiempo $t=t_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}G \;=\; c^2\Delta_x G + \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) & \text{si } x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n,\ t>0 \\ G(x,t;x_0,t_0) \;=\; 0 & \text{para } t<t_0 \\ +\text{CCH} & \text{(condiciones de contorno homogéneas)} \end{cases}$$

Las condiciones de contorno para la función de Green son las mismas que para la función u, pero igualadas a 0 (por eso son homogéneas).

La condición $G(x,t;x_0,t_0)=0$ para $t<t_0$ se conoce como *principio de causalidad*: G es la respuesta a un impulso puntual en $t=t_0$ (nula en $t<t_0$). G verifica la denominada *propiedad de traslación*: $G(x,t;x_0,t_0)=G(x,t-t_0;x_0,0)$.

Puede demostrarse que la solución $u(x,t)$ del problema original es

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t\int_\Omega G(x,t;x_0,t_0)\,Q(x_0,t_0)\,dx_0\,dt_0 \\ &+\int_\Omega\Big(g(x_0)\,G(x,t;x_0,0) - \,f(x_0)\,\frac{\partial G}{\partial t_0}(x,t;x_0,0)\Big)dx_0 \\ &-c^2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\Big(u(x_0,t_0)\,\nabla_{x_0}G(x,t;x_0,t_0) - G(x,t;x_0,t_0)\,\nabla_{x_0}u(x_0,t_0)\Big)\cdot\mathbf{n}\,dS(x_0)\,dt_0\,, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$, ∇_{x_0} es el gradiente con respecto a las n variables de x_0, y $dS(x_0)$ es la medida para integrar en $\partial\Omega$ con respecto a la variable x_0 (es decir, el elemento de longitud de arco si $n=2$ y por tanto $\partial\Omega$ es una curva, y el elemento de superficie si $n=3$ y por tanto $\partial\Omega$ es una superficie).

5.2. Ecuación del calor

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) \;=\; k\Delta_x u(x,t) + Q(x,t) & \text{si } x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ +\text{CCPNH} & \end{cases}$$

Definimos la función de Green $G(x,t;x_0,t_0)$ para este problema como una solución debida a una fuente unidad concentrada en $x = x_0$ actuando sólo en el tiempo $t = t_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}G \;=\; k\Delta_x G + \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) & \text{si } x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ G(x,t;x_0,t_0) \;=\; 0 & \text{para } t < t_0 \\ +\text{CCH} & \end{cases}$$

La condición $G(x,t;x_0,t_0) = 0$ para $t < t_0$ se conoce como *principio de causalidad*. G verifica la denominada *propiedad de traslación*: $G(x,t;x_0,t_0) = G(x,t-t_0;x_0,0)$.

Puede demostrarse que la solución $u(x,t)$ del problema original es

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t \int_\Omega G(x,t;x_0,t_0)\, Q(x_0,t_0)\, dx_0\, dt_0 \\ &+ \int_\Omega G(x,t;x_0,0)\, f(x_0)\, dx_0 \\ &+ k \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Big(G(x,t;x_0,t_0)\, \nabla_{x_0} u(x_0,t_0) - u(x_0,t_0)\, \nabla_{x_0} G(x,t;x_0,t_0) \Big) \cdot \mathbf{n}\, dS(x_0)\, dt_0\,, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$, ∇_{x_0} es el gradiente con respecto a las n variables de x_0, y $dS(x_0)$ es la medida para integrar en $\partial\Omega$ con respecto a la variable x_0.

5.3. Ecuaciones de Laplace y de Poisson

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n \\ +\text{CCPNH} & \end{cases}$$

Definimos la función de Green $G(x,x_0)$ para este problema como una solución de

$$\begin{cases} \Delta G(x,x_0) = \delta(x-x_0) & \text{si } x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n \\ +\text{CCH} & \end{cases}$$

G verifica la denominada *ley de reciprocidad*: $G(x,x_0) = G(x_0,x)$.

Puede demostrarse que la solución $u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n \\ u(x) = h(x) & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

es

$$u(x) = \int_\Omega f(x_0)\, G(x,x_0)\, dx_0 + \int_{\partial\Omega} h(x_0)\, \nabla_{x_0} G(x,x_0) \cdot \mathbf{n}\, dS(x_0)\,,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$, ∇_{x_0} es el gradiente con respecto a las n variables de x_0, y $dS(x_0)$ es la medida para integrar en $\partial\Omega$ con respecto a la variable x_0.

5.3.1. Problema de Dirichlet para el círculo

La solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{si } |x| < a\,, \\ u = h(x) & \text{si } |x| = a\,, \end{cases}$$

puede escribirse en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} u(r,\theta) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a f(r_0,\theta_0)\log\Big(a^2\,\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}{r^2+\frac{a^4}{r_0^2}+2\frac{a^2r}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)}\Big)\,r_0\,dr_0\,d\theta_0 \\ & + \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} h(\theta_0)\,\frac{a^2-r^2}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\theta_0)}\,d\theta_0\,. \end{aligned}$$

5.3.2. Identidades de Green

Si $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $u, v \in C^2\big(\overline{\Omega}\big)$ y $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$, se verifica la primera identidad de Green

$$\int_\Omega u\,\Delta v = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,.$$

Si ahora escribimos esta igualdad intercambiando los papeles de u y v, y restamos ambas fórmulas, se obtiene la segunda identidad de Green:

$$\int_\Omega \big(u\,\Delta v - v\,\Delta u\big) = \int_{\partial\Omega}\Big(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\,.$$

Tomando $v = u$ en la primera identidad de Green, se obtiene como caso particular

$$\int_\Omega u\,\Delta u = -\int_\Omega \big\|\nabla u\big\|^2 + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,.$$

5.3.3. Unicidad en las ecuaciones de Laplace y de Poisson

Dados los problemas de Dirichlet y de Neumann,

$$(D)\ \begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n \\ u(x) = g(x) & \text{si } x\in\partial\Omega \end{cases} \qquad (N)\ \begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = h(x) & \text{si } x\in\partial\Omega \end{cases}$$

el problema de Dirichlet (D) tiene solución única, y el problema de Neumann (N) tiene solución única salvo constantes.

El problema mixto

$$(M)\ \begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n \\ u(x) = g(x) & \text{si } x\in A\subset\partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = h(x) & \text{si } x\in\partial\Omega\setminus A \end{cases}$$

donde A es un subconjunto de Ω con medida $(n-1)$-dimensional positiva, también tiene solución única.