APUNTES DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
PARA INGENIEROS DE TELECOMUNICACIONES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

6. Función de Green II. Dominios no acotados

6.1. Transformada de Fourier en R

6.1.1. Convolución

Dadas dos funciones $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, se define (si tiene sentido) su convolución $f * g$ como

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\; g(y)\; dy\,.$$

La convolución es una operación conmutativa y asociativa, y además es una aplicación lineal como función de cada una de las variables f y g:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ f * g * h &= (f * g) * h = f * (g * h) \\ (a_1 f_1 + a_2 f_2) * g &= a_1 (f_1 * g) + a_2 (f_2 * g), \qquad a_1, a_2 \in \mathbf{R}\,. \end{aligned}$$

6.1.2. Transformada de Fourier en R

Si $f \in L^1(\mathbf{R})$, se define su transformada de Fourier como

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx\,.$$

Si no existe esta integral, $F(\omega)$ puede definirse como el valor principal de dicha integral. La transformada de Fourier tiene propiedades muy interesantes ($\alpha > 0$):

$$(F1)\quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

$$(F2)\quad \mathcal{F}(af + bg)(\omega) \;=\; a\mathcal{F}(f)(\omega) + b\mathcal{F}(g)(\omega)$$

$$(F3)\quad \mathcal{F}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)(\omega) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\big(\mathcal{F}(f)(\omega)\big)$$

$$(F4)\quad \mathcal{F}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(\omega) \;=\; -i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$(F5)\quad \mathcal{F}\Big(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\Big)(\omega) \;=\; (-i\omega)^k\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$(F6)\quad \mathcal{F}(f * g)(\omega) \;=\; \mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega)$$

$$(F7)\quad \mathcal{F}(xf(x))(\omega) \;=\; -i\frac{\partial}{\partial \omega}\big(\mathcal{F}(f)(\omega)\big), \qquad \mathcal{F}(x^k f(x))(\omega) \;=\; (-i)^k \frac{\partial^k}{\partial \omega^k}\big(\mathcal{F}(f)(\omega)\big)$$

$$(F8)\quad \mathcal{F}\Big(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-x^2/(4\alpha)}\Big)(\omega) \;=\; e^{-\alpha\omega^2}, \qquad \mathcal{F}\big(e^{-\alpha x^2}\big)(\omega) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}\, e^{-\omega^2/(4\alpha)}$$

$$(F9)\quad \mathcal{F}(\delta(x - x_0))(\omega) \;=\; \frac{e^{i\omega x_0}}{2\pi}\,, \qquad \mathcal{F}(\delta(x))(\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi}$$

$$(F10) \quad \mathcal{F}(f(x-x_0))(\omega) \,=\, e^{i\omega x_0}\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$(F11) \quad \mathcal{F}(e^{ixx_0}f(x))(\omega) \,=\, \mathcal{F}(f)(\omega+x_0)$$

$$(F12) \quad \mathcal{F}\big(f(\alpha x)\big)(\omega) \,=\, \frac{1}{\alpha}\,\mathcal{F}(f)\Big(\frac{\omega}{\alpha}\Big)$$

$$(F13) \quad \mathcal{F}\Big(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{-i\pi/4}\, e^{ix^2/(4\alpha)}\Big)(\omega) \,=\, e^{-i\alpha\omega^2}$$

$$(F14) \quad \mathcal{F}\Big(\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\Big)(\omega) \,=\, e^{-\alpha|\omega|}, \qquad \mathcal{F}\big(e^{-\alpha|x|}\big)(\omega) \,=\, \frac{\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$$

$$(F15) \quad \mathcal{F}(f)(\omega) \,=\, \frac{\operatorname{sen}\alpha\omega}{\pi\omega}\,, \qquad \text{si } f(x) = I_{[-\alpha,\alpha]}(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } |x|\le\alpha \\ 0\,, & \text{si } |x|>\alpha \end{cases}$$

$$(F16) \quad |\mathcal{F}(f)(\omega)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\,, \qquad \forall\,\omega\in\mathbf{R}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(f)(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx\,.$$

6.1.3. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales homogéneas

Ecuación de Laplace en el semiplano $\mathbf{R}\times(0,\infty)$

Si $x\in\mathbf{R}$, $y>0$, queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) \,+\, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) \,=\, 0 & \text{en } \mathbf{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) \,=\, f(x) & \text{en } \mathbf{R}\,, \end{cases}$$

siendo u una función acotada en $\mathbf{R}\times(0,\infty)$. Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} -\omega^2U(\omega,y) \,+\, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}U(\omega,y) \,=\, 0 \\ U(\omega,0) \,=\, F(\omega) \end{cases}$$

$$U(\omega,y) \,=\, F(\omega)\,e^{-|\omega|y}$$

$$P_y(x) \,=\, \frac{2\,y}{x^2+y^2} \qquad\qquad \mathcal{F}(P_y)(\omega) \,=\, e^{-|\omega|y}$$

$$u(x,y) \,=\, \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,f(t)\;dt\,.$$

Ecuación del calor en $\mathbf{R}\times(0,\infty)$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) \,=\, k\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) & \text{si } x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0) \,=\, f(x) & \text{si } x\in\mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}U(\omega,t) \,=\, -k\omega^2U(\omega,t) \\ U(\omega,0) \,=\, F(\omega) \end{cases}$$

$$U(\omega,t) \;=\; F(\omega)\, e^{-k\omega^2 t}$$

$$K_t(x) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{kt}}\; e^{-\frac{x^2}{4kt}} \qquad\qquad \mathcal{F}(K_t)(\omega) \;=\; e^{-k\omega^2 t}$$

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, f(y)\; dy\,.$$

Ecuación de ondas en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \;=\; c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) & \text{si } x\in\mathbf{R},\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x\in\mathbf{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) \;=\; g(x) & \text{si } x\in\mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} U(\omega,t) \;=\; -c^2\omega^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,0) \;=\; F(\omega) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} U(\omega,0) \;=\; G(\omega) \end{cases}$$

$$U(\omega,t) \;=\; F(\omega)\, \cos(c\omega t) \;+\; G(\omega)\, \frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{c\omega}\,.$$

Si definimos $E_t(x)$ como

$$E_t(x) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\operatorname{sen}(c\omega t)}{c\omega}\Big)(x) \;=\; \frac{\pi}{c}\, I_{[-ct,ct]}(x)\,,$$

entonces la solución puede escribirse como

$$u(x,t) \;=\; \Big(f * \frac{\partial E_t}{\partial t}\Big)(x) \;+\; (g * E_t)(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}(f * E_t)(x) \;+\; (g * E_t)(x)\,,$$

y por tanto,

$$u(x,t) \;=\; \frac{f(x+c\,t) + f(x-c\,t)}{2} \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\; ds\,.$$

Ecuación de Schrödinger en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) \;=\; \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) & \text{si } x\in\mathbf{R},\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x\in\mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U(\omega,t) \;=\; -i\,\omega^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,0) \;=\; F(\omega) \end{cases}$$

$$U(\omega,t) \;=\; F(\omega)\, e^{-i\omega^2 t}$$

$$S_t(x) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{t}}\; e^{-i\pi/4}\, e^{i\frac{x^2}{4t}} \qquad\qquad \mathcal{F}(S_t)(\omega) \;=\; e^{-i\omega^2 t}$$

$$u(x,t) \;=\; \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\, f(y)\; dy\,.$$

6.2. Transformada de Fourier en $\mathbf{R}^n$

Si $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, se define su transformada de Fourier como

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, e^{i\omega\cdot x}\, dx\,,$$

donde $\omega \cdot x = \omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n$ y $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Como en el caso de $\mathbf{R}$, la transformada de Fourier en $\mathbf{R}^n$ tiene propiedades muy interesantes ($\alpha > 0$):

$$(F1) \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F)(x) \;=\; \int_{\mathbf{R}^n} F(\omega)\, e^{-i\omega\cdot x}\, d\omega$$

$$(F2) \quad \mathcal{F}(af + bg)(\omega) \;=\; a\mathcal{F}(f)(\omega) + b\mathcal{F}(g)(\omega)$$

$$(F3) \quad \mathcal{F}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)(\omega) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\big(\mathcal{F}(f)(\omega)\big)$$

$$(F4) \quad \mathcal{F}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(\omega) \;=\; -i\omega_j \mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$(F5) \quad \mathcal{F}(\Delta f)(\omega) \;=\; -|\omega|^2 \mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$(F6) \quad \mathcal{F}(f * g)(\omega) \;=\; \mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega)$$

$$(F7) \quad \mathcal{F}(x_j f(x))(\omega) \;=\; -i\frac{\partial}{\partial \omega_j}\big(\mathcal{F}(f)(\omega)\big)$$

$$(F8) \quad \mathcal{F}(f)(\omega) \;=\; \mathcal{F}(f_1)(\omega_1)\cdots\mathcal{F}(f_n)(\omega_n)\,, \qquad \text{si} \;\; f(x) \;=\; f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$$

$$(F9) \quad \mathcal{F}\Big(\Big(\frac{\pi}{\alpha}\Big)^{n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha)}\Big)(\omega) \;=\; e^{-\alpha|\omega|^2}, \quad \mathcal{F}\big(e^{-\alpha|x|^2}\big)(\omega) \;=\; \frac{1}{(4\pi\alpha)^{n/2}}\, e^{-|\omega|^2/(4\alpha)}$$

$$(F10) \quad \mathcal{F}(\delta(x - x_0))(\omega) \;=\; \frac{e^{i\omega\cdot x_0}}{(2\pi)^n}\,, \quad \mathcal{F}(\delta(x))(\omega) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}$$

$$(F11) \quad \mathcal{F}(f(x - x_0))(\omega) \;=\; e^{i\omega\cdot x_0}\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$(F12) \quad \mathcal{F}(e^{ix\cdot x_0} f(x))(\omega) \;=\; \mathcal{F}(f)(\omega + x_0)$$

$$(F13) \quad \mathcal{F}\big(f(\alpha x)\big)(\omega) \;=\; \frac{1}{\alpha^n}\,\mathcal{F}\big(f\big)\Big(\frac{\omega}{\alpha}\Big)$$

$$(F14) \quad \mathcal{F}\Big(\Big(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-i\pi/4}\Big)^n e^{i|x|^2/(4\alpha)}\Big)(\omega) \;=\; e^{-i\alpha|\omega|^2}$$

$$(F15) \quad |\mathcal{F}(f)(\omega)| \le \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\, dx\,, \qquad \forall\, \omega \in \mathbf{R}^n\,,$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2\, dx\,.$$

6.2.1. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales homogéneas

Ecuación del calor en $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) \;=\; k\Delta_x u(x,t) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U(\omega,t) \;=\; -k|\omega|^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,0) \;=\; F(\omega) \end{cases}$$

$$U(\omega,t) \;=\; F(\omega)\, e^{-k|\omega|^2 t}$$

$$K_t(x) \;=\; \Big(\frac{\pi}{kt}\Big)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}} \qquad\qquad \mathcal{F}(K_t)(\omega) \;=\; e^{-k|\omega|^2 t}$$

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{(4\pi k t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\, f(y)\; dy\,.$$

Ecuación de ondas en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \;=\; c^2 \Delta_x u(x,t) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n,\ t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) \;=\; g(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} U(\omega,t) \;=\; -c^2|\omega|^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,0) \;=\; F(\omega) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} U(\omega,0) \;=\; G(\omega) \end{cases}$$

$$U(\omega,t) \;=\; F(\omega)\, \cos(c|\omega|t) \;+\; G(\omega)\, \frac{\operatorname{sen}(c|\omega|t)}{c|\omega|}\,.$$

Si definimos $E_t(x)$ como

$$E_t(x) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\operatorname{sen}(c|\omega|t)}{c|\omega|}\Big)(x)\,,$$

entonces la solución puede escribirse como

$$u(x,t) \;=\; \Big(f * \frac{\partial E_t}{\partial t}\Big)(x) \;+\; (g * E_t)(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}(f * E_t)(x) \;+\; (g * E_t)(x)\,.$$

Para $n = 3$, se tiene

$$E_t(x) \;=\; \frac{2\pi^2}{c^2 t}\, \sigma_{ct}(x)\,,$$

donde $\sigma_{ct}(x)$ es la “medida”sobre la esfera de centro 0 y radio ct, $\sigma := \sigma_1$, y por tanto,

$$u(x,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} f\,(x + c\,t\,y)\;\; d\,\sigma\,(y)\Big) \;+\; \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g\,(x + c\,t\,y)\;\; d\,\sigma\,(y)\,.$$

Ecuación de Schrödinger en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) \;=\; \Delta_x u(x,t) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n,\ t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n\,. \end{cases}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U(\omega,t) \;=\; -i\,|\omega|^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,0) \;=\; F(\omega) \end{cases}$$

$$U(\omega,t) \;=\; F(\omega)\, e^{-i|\omega|^2 t}$$

$$S_t(x) \;=\; \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}}\; e^{-i\pi/4}\right)^n e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \qquad\qquad \mathcal{F}(S_t)(\omega) \;=\; e^{-i|\omega|^2 t}$$

$$u(x,t) \;=\; \left(\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}\, f(y)\; dy\,.$$

6.3. Funciones de Green en dominios no acotados

6.3.1. Ecuación de ondas en $\mathbf{R}^n$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \;=\; c^2 \Delta_x u(x,t) + Q(x,t) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) \;=\; g(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

La función de Green $G(x,t;x_0,t_0)$ para este problema es una solución debida a una fuente unidad concentrada en $x = x_0$ actuando sólo en el tiempo $t = t_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} G \;=\; c^2 \Delta_x G + \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ G(x,t;x_0,t_0) \;=\; 0 & \text{para } t < t_0\,. \end{cases}$$

Se puede aplicar la transformada de Fourier en la variable x, y se obtiene

$$\mathcal{F}(G)(\omega,t;x_0,t_0) \;=\; \frac{e^{i\omega\cdot x_0} H(t-t_0)\,\operatorname{sen} c|\omega|(t-t_0)}{(2\pi)^n c|\omega|}\,.$$

Por lo tanto,

$$G(x,t;x_0,t_0) \;=\; \frac{H(t-t_0)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{-i\omega\cdot(x-x_0)}\,\operatorname{sen} c|\omega|(t-t_0)}{c|\omega|}\; d\omega\,.$$

Si $n = 1$ $\big(x \in \mathbf{R}\big)$,

$$G(x,t;x_0,t_0) \;=\; \frac{H(t-t_0)}{2c}\; I_{[x_0-c(t-t_0),x_0+c(t-t_0)]}(x)\,,$$

donde la función de Heaviside $H(t-t_0)$ es igual a 0 si $t < t_0$ y es igual a 1 si $t \geq t_0$, y la función indicadora $I_{[a,b]}(x)$ es igual a 0 si $x \notin [a,b]$ y es igual a 1 si $x \notin [a,b]$. Por tanto, se obtiene

$$u(x,t) \;=\; \frac{f(x+c\,t)+f(x-c\,t)}{2} \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0)\; dx_0 \;+\; \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-t_0)}^{x+c(t-t_0)} Q(x_0,t_0)\; dx_0\, dt_0\,.$$

Si $Q = 0$, se obtiene la fórmula de D'Alembert

$$u(x,t) \;=\; \frac{f(x+c\,t)+f(x-c\,t)}{2} \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0)\; dx_0\,.$$

Si $n = 3$ $\big(x \in \mathbf{R}^3\big)$,

$$G(x,t;x_0,t_0) \;=\; \frac{H(t-t_0)}{4\pi c|x-x_0|}\,\delta\big(|x-x_0| - c(t-t_0)\big)\,,$$

y por tanto, si $u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$, y con condiciones de contorno nulas en el infinito,

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{4\pi c}\int_0^t \frac{1}{c(t-t_0)}\int_{\{|x_0-x|=c(t-t_0)\}} Q(x_0,t_0)\,dS(x_0)\,dt_0\,.$$

Si $n = 2$ $\big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big)$, el método de descenso de Hadamard nos proporciona

$$G(x,y,t;x_0,y_0,t_0) \;=\; \frac{I_{[0,c(t-t_0)]}(r_0)}{2\pi c}\,\frac{1}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2 - r_0^2}}\,,$$

donde $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ y por tanto, si $u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$, y con condiciones de contorno nulas en el infinito,

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi c}\int_0^t \iint_{\{r_0<c(t-t_0)\}} \frac{Q(x_0,t_0)}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2 - r_0^2}}\,dx_0\,dy_0\,dt_0\,.$$

6.3.2. Ecuación del calor en $\mathbf{R}^n$

Queremos resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) \;=\; k\Delta_x u(x,t) + Q(x,t) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) \;=\; f(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

y con condiciones de contorno nulas en el infinito ($\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$).

Definimos la función de Green $G(x,t;x_0,t_0)$ para este problema como una solución debida a una fuente unidad concentrada en $x = x_0$ actuando sólo en el tiempo $t = t_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}G \;=\; k\Delta_x G + \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) & \text{si } x \in \mathbf{R}^n,\ t>0 \\ G(x,t;x_0,t_0) \;=\; 0 & \text{para } t<t_0 \end{cases}$$

y con condiciones de contorno nulas en el infinito.

Se puede aplicar la transformada de Fourier en la variable x, y se obtiene

$$G(x,t;x_0,t_0) \;=\; \frac{H(t-t_0)}{(4\pi k(t-t_0))^{n/2}}\,e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4k(t-t_0)}}\,.$$

Por lo tanto, si $u(x,t)$ es la solución del problema original con condiciones de contorno nulas en el infinito, entonces

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(4\pi k(t-t_0))^{n/2}}\,e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4k(t-t_0)}}\,Q(x_0,t_0)\,dx_0\,dt_0 \\ &+ \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4kt}}\,f(x_0)\,dx_0\,. \end{aligned}$$

6.3.3. Ecuaciones de Laplace y Poisson en $\mathbf{R}^n$

La función de Green en $\mathbf{R}^n$ para las ecuaciones de Laplace y Poisson es la solución de

$$\Delta G(x;x_0) = \delta(x-x_0) \qquad \text{si } x \in \mathbf{R}^n.$$

En $\mathbf{R}^n$, por simetría, la función de Green debe ser radial con respecto a x_0. Por tanto, vamos a buscar las funciones armónicas en $\mathbf{R}^n$ que sólo dependen del radio. Si $n = 2$,

$$\begin{aligned} G(x,x_0) \;&=\; G(r)\,, \qquad \text{si } r = |x-x_0|\,, \quad r \neq 0\,, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right) &= 0\,, \qquad G(r) = c_1 \log r + c_2\,, \quad r \neq 0\,. \end{aligned}$$

Si $n = 3$,

$$\begin{aligned} G(x,x_0) \;&=\; G(\rho)\,, \qquad \text{si } \rho = |x-x_0|\,, \quad \rho \neq 0\,, \\ \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dG}{d\rho}\right) &= 0\,, \qquad G(\rho) = \frac{c_3}{\rho} + c_4\,, \quad \rho \neq 0\,. \end{aligned}$$

Eligiendo apropiadamente las constantes para que se satisfaga $\Delta G(x,x_0) = \delta(x-x_0)$, se obtiene respectivamente, para $n = 2$ y $n = 3$,

$$G(x,x_0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\,\log|x-x_0|\,, \qquad G(x,x_0) \;=\; \frac{-1}{4\pi|x-x_0|}\,.$$

Por tanto, una solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x) = f(x)$$

puede escribirse respectivamente, para $n = 2$ y $n = 3$, como

$$u(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\,\log|x-x_0|\,dx_0\,, \qquad u(x) \;=\; \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{f(x)}{|x-x_0|}\,dx_0\,.$$

6.3.4. Ecuaciones de Laplace y Poisson en el semiplano

La función de Green para el semiplano superior, con valor cero en la frontera, es la solución de

$$\begin{cases} \Delta G(x,y;x_0,y_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) & \text{si } x \in \mathbf{R}\,,\ y > 0\,, \\ G(x,0;x_0,y_0) = 0 & \text{si } x \in \mathbf{R}\,,\ y = 0\,. \end{cases}$$

Se tiene que

$$G(x,y;x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\log\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\,.$$

Por lo tanto, la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{si } x \in \mathbf{R}\,,\ y > 0\,, \\ u(x,0) = h(x) & \text{si } x \in \mathbf{R}\,,\ y = 0\,, \end{cases}$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(x,y) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} f(x_0,y_0)\log\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\,dy_0\,dx_0 \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} h(x_0)\,\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2}\,dx_0\,. \end{aligned}$$