APUNTES DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
PARA INGENIEROS DE TELECOMUNICACIONES

Elaborados por Arturo de Pablo, Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

1. Introducción

1.1. Clasificación de EDP de segundo orden. Dimensión 2

Consideramos la ecuación diferencial lineal de segundo orden en dimensión 2

$$L(u) + m(u) = f$$

donde la parte principal del operador es

$$L(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

los coeficientes son constantes, el término $m(u)$ contiene sólo derivadas de menor orden, y el término independiente f sólo depende de x e y. Consideramos también el cambio de variables

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y,$$

donde $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, que pretendemos simplifique el operador. Si $u(x, y) = v(\xi, \eta)$, la parte principal del operador diferencial se transforma en

$$\widetilde{L}(v) = A\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 \\ B &= a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta \\ C &= a\gamma^2 + 2b\delta\gamma + c\delta^2 \end{aligned}$$

Queremos hacer $A = C = 0$. Supongamos entonces $a \neq 0$ (si no, tomamos $c \neq 0$ en el papel de a). La ecuación $A = 0$ es equivalente a que α/β sea solución de la ecuación cuadrática

$$ar^2 + 2br + c = 0$$

Por su parte, $C = 0$ es equivalente a que γ/δ sea solución de la misma ecuación. Por tanto, si $D = b^2 - ac > 0$, hay dos soluciones r_1, r_2, de esa ecuación. Con la elección del cambio de variables $\alpha/\beta = r_1$, $\gamma/\delta = r_2$, el operador reducido será

$$\widetilde{L}(v) = 2B\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$$

Se dice que L es hiperbólico, y que $\widetilde{L}$ es su forma canónica. Las familias de curvas (rectas) $\xi = cte$, $\eta = cte$, se denominan características. A la hora de resolver la ecuación hiperbólica, no se pueden dar datos en esas curvas, pues el problema estaría mal propuesto.

Por ejemplo, la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se reduce, mediante el cambio

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct,$$

a la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

Si $D = 0$ sólo hay una solución, $r = -b/a$. Tomando $\gamma/\delta = r$ hacemos $C = 0$. Pero si elegimos $\delta = a$, $\gamma = -b$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, tenemos también $B = 0$, y el operador queda

$$\widetilde{L}(v) = A\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}$$

Se dice que L es parabólico.

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

se reduce, mediante el cambio

$$\xi = x, \qquad \eta = x - t,$$

a la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial\eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}$$

que es la ecuación del calor.

Si $D < 0$ no podemos anular ni A ni C. Pero tomando $\delta = a$, $\gamma = -b$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, podemos anular B. De hecho, tomando $\delta = a/\sqrt{|D|}$, $\gamma = -b/\sqrt{|D|}$, podemos igualar los coeficientes A y C. Así queda

$$\widetilde{L}(v) = A(\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2})$$

Se dice que L es elíptico. La ecuación $\widetilde{L}(v) = 0$ es la ecuación de Laplace.

Los nombres proceden del carácter de la forma cuadrática definida por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

que representa genéricamente una elipse, una parábola o una hipérbola, dependiendo de si M es definida, semidefinida o indefinida.

Si los coeficientes a, b, c y d dependen de x e y, el carácter del operador puede depender del punto. Si el operador es no lineal, y los coeficientes dependen de u, entonces el carácter puede depender incluso de la solución.

1.2. Dimensión general $N \geq 2$

En general, para un operador en dimensión $d \geq 1$

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$$

se dice que es elíptico si la matriz $\mathcal{A} = (a_{ij})$ es definida (supongamos positiva). Una condición necesaria y suficiente es que todos sus autovalores sean estrictamente positivos. A partir de este operador podemos construir ecuaciones de los tres tipos mencionados arriba en dimensión $N \geq 2$.

$$
\begin{array}{ll}
L(u) = f & \text{elíptica, } M = \mathcal{A},\ N = d \\
\dfrac{\partial u}{\partial t} - L(u) = f & \text{parabólica, } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{A} \end{pmatrix},\ N = d+1 \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = f & \text{hiperbólica, } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathcal{A} \end{pmatrix},\ N = d+1
\end{array}
$$

La matriz M que define la parte principal del operador es definida, semidefinida o indefinida, respectivamente.

El prototipo es, como sabemos, el operador laplaciano, $M = \Delta$, que se obtiene con la matriz $\mathcal{A} = I$. Los ejemplos anteriores corresponden entonces a las ecuaciones del potencial, del calor y de ondas, respectivamente. Cuando la matriz no es la identidad el modelo refleja una falta de homogeneidad del espacio.

1.3. Fórmulas

- Identidad de Green: $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v = \int_\Omega v\Delta u + \int_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big)$
- Laplaciano radial y en polares.

$$
\begin{array}{lll}
N \geq 1, \quad u(\vec{x}) = v(r) & \rightsquigarrow & \Delta u = \dfrac{1}{r^{N-1}}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r^{N-1}\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big) \\[2ex]
N = 2, \quad u(x,y) = v(r,\theta) & \rightsquigarrow & \Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}
\end{array}
$$

- Desarrollo en serie generalizada de Fourier en una base $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de autofunciones en un dominio Ω de $\mathbf{R}^N$,

$$
\begin{cases}
L\varphi_n + \lambda_n \sigma \varphi_n = 0, & \vec{x} \in \Omega \\
+CC, & \vec{x} \in \partial\Omega
\end{cases}
$$

$L = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(p\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) + q =$ operador de Sturm-Liouville en $N = 1$, o $L = \Delta =$ laplaciano en $N > 1$.

$$
f(\vec{x}) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n(\vec{x}), \qquad a_n = \frac{\displaystyle\int_\Omega f(\vec{x})\varphi_n(\vec{x})\sigma(\vec{x})\,d\vec{x}}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_n^2(\vec{x})\sigma(\vec{x})\,d\vec{x}}
$$

- Caso particular $N = 1$, $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\sigma = 1$, $\Omega = [0, \pi]$,

$$
f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n \operatorname{sen}(nx), \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx
$$

- Cociente de Rayleigh para L en dimensión 1 y $\Omega = [a, b]$

$$
\lambda_n = \frac{\Big[p\varphi_n\varphi_n'\Big]_a^b + \displaystyle\int_a^b (p(\varphi_n')^2 - q\varphi_n^2)}{\displaystyle\int_a^b \varphi_n^2\sigma}
$$

- Transformada de Fourier en $\mathbf{R}^N$: $\hat{f}(\vec{\xi}\,) = \dfrac{1}{(2\pi)^N} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} f(\vec{x}) \exp^{i\vec{\xi}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}$
- Transformada de Fourier de una gaussiana y una convolución

$$f(\,\vec{x}\,) = \exp^{-\alpha|\,\vec{x}\,|^2} \;\rightsquigarrow\; \hat{f}(\,\vec{\xi}\,) = (4\pi\alpha)^{-N/2} \exp^{-|\,\vec{\xi}\,|^2/4\alpha}$$

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\, dy \;\rightsquigarrow\; (f*g)\hat{}\,(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$$

- Fórmula de representación de Green para la ecuación de Poisson $\Delta u = F$, $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^N$.

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \int_\Omega F(\vec{x}_0) G(\vec{x}, \vec{x}_0)\, dx_0 \\ &+ \int_{\partial\Omega} \Big(u(\vec{x}_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x}, \vec{x}_0) - G(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x}_0) \Big)\, dx_0 \end{aligned}$$

- Fórmula de representación para la ecuación del calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = F, \quad \vec{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^N,\ t > 0.$

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \int_0^t \int_\Omega F(\vec{x}_0, t_0) G(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0)\, dx_0\, dt_0 \\ &-k \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Big(u(\vec{x}_0, t_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) - G(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x}_0, t_0) \Big)\, dx_0\, dt_0 \\ &+ \int_\Omega u(\vec{x}_0, 0) G(\vec{x}, t, \vec{x}_0, 0)\, dx_0 \end{aligned}$$

- Fórmula de representación para la ecuación de ondas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = F, \quad \vec{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^N,\ t > 0.$

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \int_0^t \int_\Omega F(\vec{x}_0, t_0) G(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0)\, dx_0\, dt_0 \\ &-c^2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Big(u(\vec{x}_0, t_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) - G(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}(\vec{x}_0, t_0) \Big)\, dx_0\, dt_0 \\ &- \int_\Omega \Big(u(\vec{x}_0, 0) \frac{\partial G}{\partial t_0}(\vec{x}, t, \vec{x}_0, 0) - G(\vec{x}_0, t, x_0, 0) \frac{\partial u}{\partial t_0}(\vec{x}_0, 0) \Big)\, dx_0 \end{aligned}$$

- Caso particular $N = 1$, $\Omega = \mathbf{R}$ (fórmula de d'Alambert, con Duhamel)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-t_0)}^{x+c(t-t_0)} F(x_0, t_0)\, dx_0\, dt_0 \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\partial u}{\partial t_0}(x_0, 0)\, dx_0 + \frac{1}{2}\Big(u(x+ct, 0) + u(x-ct, 0) \Big) \end{aligned}$$

- Función de Green de la ecuación de Poisson en el espacio, $G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \Gamma(|\vec{x} - \vec{x}_0|)$:

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log r & \text{si } \ N = 2 \\ -\dfrac{1}{4\pi r} & \text{si } \ N = 3 \end{cases}$$

- Función de Green (en polares) de la ecuación de Poisson en el disco de radio R:

$$G(r, \theta, r_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \log \Big(\frac{R^2(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0))}{R^4 + r^2 r_0^2 - 2R^2 r r_0 \cos(\theta - \theta_0)} \Big)$$

- Función de Green de la ecuación del calor en el espacio, $G(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) = K(|\vec{x} - \vec{x}_0|, t - t_0)$:

$$K(r, s) = (4k\pi s)^{-N/2} \exp^{-r^2/4ks}$$

- Función de Green de la ecuación de ondas en el espacio $G(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) = D(|\vec{x} - \vec{x}_0|, t - t_0)$:

$$D(r, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}\chi_{\{r \leq cs\}} & \text{si } \; N = 1 \\ \dfrac{1}{2\pi c\sqrt{c^2 s^2 - r^2}}\chi_{\{r \leq cs\}} & \text{si } \; N = 2 \\ \dfrac{1}{4\pi c^2 s}\delta(r - cs) & \text{si } \; N = 3. \end{cases}$$